Mathematisches Institut **SS 2001**
der Universität München **Blatt 4**
Prof. Dr. B. Pareigis

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Zeigen Sie, daß die Parität von σ durch die Formel
$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$
gegeben ist. Zeigen Sie weiter, daß die Abbildung
$$\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}, \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$$
ein Gruppenhomomorphismus ist. (6)

2. Sei R ein nullteilerfreier Ring.

   (a) Zeigen Sie, daß auf der Menge $R \times (R \setminus \{0\})$ eine Äquivalenzrelation definiert wird, wenn man
   $$(p, q) \sim (r, s) :\Leftrightarrow ps = rq$$
   setzt. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (p, q) mit $\frac{p}{q}$.

   (b) Sei $K = (R \times (R \setminus \{0\}))/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, daß K mit der Addition
   $$+ : K \times K \to K, (\frac{p}{q}, \frac{r}{s}) \mapsto \frac{ps + rq}{qs}$$
   und der Multiplikation
   $$\cdot : K \times K \to K, (\frac{p}{q}, \frac{r}{s}) \mapsto \frac{pr}{qs}$$
   ein Körper ist.

(Hinweis: Wie Sie sicher bemerkt haben, erhält man bei dieser Konstruktion den Körper der rationalen Zahlen, falls man für R den Ring der ganzen Zahlen verwendet, der ja nullteilerfrei ist. Verwendet man stattdessen den Ring der Polynome über einem Körper, so erhält man als Ergebnis den sog. Körper der rationalen Funktionen.) (6)

3. Sei K ein Körper und seien $x_1, \ldots, x_n$ Elemente von K. Betrachten Sie die $n \times n$-Matrix A, deren (i,j)-ter Eintrag die Zahl x_j^{i-1} ist, also die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
Zeigen Sie, daß für die Determinante der Matrix die Formel
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)$$
gilt. (Hinweis: Diese Matrix ist die sog. Vandermonde-Matrix. Überzeugen Sie sich zunächst von der Richtigkeit dieser Formel für kleine Zahlen n. Zeigen Sie dann die allgemeine Formel per Induktion, indem Sie durch elementare Zeilenumformungen alle Einträge außer dem ersten in der ersten Spalte zu Null machen.) (4)

4. Seien $v = (x_1, x_2)$ und $w = (y_1, y_2)$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß die Menge $T := \{av + bw \mid 0 \leq a, b \leq 1, \frac{1}{2} \leq a + b \leq 1\}$ den Flächeninhalt $\frac{3}{8}|x_1y_2 - x_2y_1|$ hat. (Hinweis: Verwenden Sie dabei folgende Tatsachen über Flächeninhalte: Der Flächeninhalt einer Menge ändert sich nicht, wenn man sie verschiebt oder alle ihre Elemente mit -1 multipliziert. Der Flächeninhalt einer disjunkten Vereinigung ist die Summe der Flächeninhalte. Teilmengen affiner Unterräume, die nicht der ganze Raum sind, haben den Flächeninhalt Null. Beachten Sie, daß der Flächeninhalt eines Parallelepipeds mit Hilfe der Determinante berechnet wird.) (4)

Abgabe: Mittwoch, 30.5.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.