Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2001
Blatt 3

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{Q}^4$:

$$\begin{array}{ll} v_1 = (1,0,0,1) & v_2 = (0,1,1,0) \\ u_1 = (1,0,0,0) & u_2 = (0,0,0,1) \\ w_1 = (0,1,0,0) & w_2 = (0,0,1,0) \end{array}$$

   Sei U der von u_1 und u_2 erzeugte Unterraum, W der von w_1 und w_2 erzeugte Unterraum. Entscheiden Sie, ob es einen Endomorphismus f von $\mathbb{Q}^4$ gibt, für den die Abbildung

$$\bar{f} : \mathbb{Q}^4/U \to \mathbb{Q}^4/W, \bar{v} \mapsto \overline{f(v)}$$

   wohldefiniert ist und der die Restklasse von v_1 modulo U auf die Restklasse von v_1 modulo W und die Restklasse von v_2 modulo U auf die Restklasse von v_2 modulo W abbildet. (6)

2. (a) Sei V ein Vektorraum und $p : V \to V$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $p^2 = p$. Zeigen Sie, daß

$$V = \mathrm{Ke}(p) \oplus \mathrm{Bi}(p)$$

   ist.

   (b) Zeigen Sie, daß die Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   die Bedingung $p^2 = p$ erfüllt. Bestimmen Sie Kern und Bild. Stellen Sie Kern und Bild in einer Zeichnung graphisch dar und erklären Sie anhand des Bildes, wie die Abbildung wirkt.

   (6)

3. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit rationalen Einträgen durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Bestimmen Sie den Rang der Matrix. (Hinweis: Erklären Sie bitte, welche Umformungen Sie vornehmen, so daß Ihre Rechnungen für andere nachvollziehbar sind.) (4)

4. Invertieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit rationalen Einträgen durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen. (4)

Klausurtermine:
1. Klausur: Freitag, 25.5.2001, 14.00 Uhr, E 51
1. Klausur: Freitag, 22.6.2001, 14.00 Uhr, E 51
1. Klausur: Freitag, 20.7.2001, 14.00 Uhr, E 51

Abgabe: Mittwoch, 16.5.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.