Mathematisches Institut **SS 2001**
der Universität München **Blatt 2**
Prof. Dr. B. Pareigis

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Seien U und W Unterräume des Vektorraumes V. Es gelte $W \subset U$. Zeigen Sie, daß U/W ein Unterraum des Faktorraumes V/W ist. Zeigen Sie den 2. Isomorphiesatz
$$(V/W)/(U/W) \cong V/U$$
indem Sie den Homomorphiesatz auf eine kanonische Abbildung von V/W nach V/U anwenden. (6)

2. Sei (V, A) ein affiner Raum. $GL(V)$ sei die Gruppe der Automorphismen von V. Ist $p_0 \in A$ fest gegeben, so sei für $v \in V$ und $f \in GL(V)$ die Abbildung $A_{v,f}$ definiert durch
$$A_{v,f} : A \to A, p \mapsto v + f(p - p_0) + p_0$$
   (a) Zeigen Sie, daß jede Affinität von der Form $A_{v,f}$ ist, und daß dabei v und f eindeutig bestimmt sind. Zeigen Sie weiter:
$$A_{v,f} \circ A_{w,g} = A_{v+f(w),f \circ g}$$
   (b) Zeigen Sie, daß durch die Verknüpfung
$$(V \times GL(V)) \times (V \times GL(V)) \to V \times GL(V)$$
$$((v, f), (w, g)) \mapsto (v + f(w), f \circ g))$$
   auf $V \times GL(V)$ eine Gruppenstruktur eingeführt wird. Zeigen Sie weiter, daß die Abbildung
$$V \times GL(V) \to \mathrm{Bij}(A), (v, f) \mapsto A_{v,f}$$
   ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(6)

3. Sei (V, A) ein affiner Raum mit n-dimensionalem Translationsraum. Zeigen Sie, daß für Punkte $p_0, \ldots, p_n$ folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $p_0, \ldots, p_n$ bilden ein affines Bezugssystem von A.

   (b) Für jeden affinen Raum (W, B) und je $n+1$ Punkte $q_0, \ldots, q_n \in B$ existiert genau eine affine Abbildung $g : A \to B$, so daß für alle $i = 0, \ldots, n$ die Gleichung $g(p_i) = q_i$ gilt.

(4)

4. (a) Sind U_1 und U_2 Unterräume des Vektorraumes V, so heißt V die innere direkte Summe von U_1 und U_2, falls einerseits $V = U_1 + U_2$ ist und andererseits $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, daß in dieser Situation die Abbildung

$$f : U_1 \to V/U_2, u \mapsto \bar{u}$$

   ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

   (b) Sei U ein Unterraum des Vektorraumes V. Zeigen Sie, daß V isomorph zur äußeren direkten Summe $U \oplus V/U$ ist. (4)

Abgabe: Mittwoch, 9.5.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.