Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2001
Ferienblatt

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Es sei $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Menge von Vektoren eines Vektorraums über einem Körper, der nicht die Charakteristik 2 hat. Ein weiterer Vektor sei y. Zeigen Sie: Sind die Mengen von Vektoren

$$\{x_1 + y, x_2 + y, \ldots, x_n + y\} \text{ und } \{x_1 - y, x_2 - y, \ldots, x_n - y\}$$

   linear abhängig, so ist auch $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linear abhängig.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $U \subset V$ ein echter Untervektorraum. Bestimmen Sie alle Untervektorräume $W \subset V$, welche $V \setminus U$ enthalten.

3. Im affinen Raum $V = \mathbb{R}^4$ seien folgende vier Punkte gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Dimension der affinen Hülle L von $\{v_1, \ldots, v_4\}$. (Die affine Hülle L ist der kleinste affine Unterraum von V, der $\{v_1, \ldots, v_4\}$ enthält.)

   (b) Bestimmen Sie den Durchschnitt von L mit der durch die Gleichung $4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -6$ gegebenen Hyperebene H.

4. Gegeben sind die Vektorräume und linearen Abbildungen

$$V \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} V$$

   mit $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_V$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte, die für $\alpha \circ \beta$ möglich sind.

5. Sei V ein endlichdimensionaler und W ein von 0 verschiedener endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K und sei $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ der Vektorraum der linearen Abbildungen $V \to W$. Ein Endomorphismus $\alpha : V \to V$ induziert den Endomorphismus

$$\alpha^* : \mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(V,W),\ f \mapsto f \circ \alpha$$

Zeigen Sie: α^* hat die gleichen Eigenwerte wie α.

Hinweis: Wie steht es für $W \cong K$?

6. In $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$a_1 = (1,1,1,1),\quad a_2 = (1,2,2,-1),\quad a_3 = (0,1,1,-2) \text{ und}$$
$$x = (4,-1,-3,4)$$

gegeben. Sei P die Orthogonalprojektion (bzgl. des Standard-Skalarprodukts in $\mathbb{R}^4$) auf den von a_1, a_2, a_3 erzeugten Unterraum U.

   (a) Bestimmen Sie $y := Px$.

   (b) Geben Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von P an.

7. (a) Zeigen Sie, daß durch die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} X_1 - 2X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 &= 1 \end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &= 0 \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 &= 0 \end{aligned}$$

   zwei windschiefe Geraden g_1 bzw. g_2 in $\mathbb{R}^3$ gegeben werden.

   (b) Bestimmen Sie den Abstand von g_1 und g_2.

   (c) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen g_2 und einer zu g_1 parallelen Gerade durch den Ursprung.

8. Es sei die reelle Matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3+a \\ 0 & 3 & a-1 \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}$$

vorgegeben.

(a) Geben Sie die Jordansche Normalform von $A(a)$ in Abhängigkeit von a an.

(b) Geben Sie die $A(3)$-invarianten eindimensionalen Teilräume an.

9. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform einer reellen $(n \times n)$-Matrix, deren sämtliche Zeilen gleich $(1, 2, \ldots, n)$ sind.

10. Es sei für einen Endomorphismus $A : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ das Minimalpolynom $\mu(\lambda) = \lambda^3$.

    (a) Welche Dimension kann der Kern von A haben?

    (b) Man gebe für jede mögliche Dimension von Kern A alle Jordanschen Normalformen von A an.