Mathematisches Institut **SS 2001**
der Universität München **Blatt 1**
Prof. Dr. B. Pareigis

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Seien U und W Unterräume des Vektorraumes V. Zeigen Sie den 1. Isomorphiesatz
$$U/(U \cap W) \cong (U+W)/W$$
indem Sie den Homomorphiesatz auf eine kanonische Abbildung von U nach V/W anwenden. (6)

2. Betrachten Sie die durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
beschriebene lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^4$.
   (a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4/\operatorname{Ke}(f)$.
   (b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der induzierten Abbildung
$$\bar{f} : \mathbb{R}^4/\operatorname{Ke}(f) \to \mathbb{R}^4$$
   bezüglich der soeben konstruierten Basis des Faktorraumes und der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^4$. (6)

3. Sei (V, A) ein affiner Raum mit n-dimensionalem Translationsraum. Zeigen Sie, daß für Punkte $p_0, \ldots, p_n$ folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) Die Vektoren $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_n - p_0$ bilden eine Basis des Translationsraumes.
   (b) Die Differenzen $p_i - p_j$, für $i, j = 0, \ldots, n$, erzeugen den Translationsraum.

In diesem Fall heißen die Punkte $p_0, \dots, p_n$ ein affines Bezugssystem von A. (4)

4. Seien (V, A) und (W, B) affine Räume.

   (a) Zeigen Sie, daß der lineare Anteil einer affinen Abbildung eindeutig bestimmt ist, d. h., daß für zwei affine Abbildungen (f_1, g_1) und (f_2, g_2) gilt: Ist $g_1 = g_2$, so ist $f_1 = f_2$. (Daher ist es sinnvoll zu sagen, daß eine Abbildung g affin sei, ohne den linearen Anteil zu nennen.)

   (b) Sei $p_0 \in A$. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $g : A \to B$ genau dann affin ist, wenn die Abbildung

   $$f : V \to W, v \mapsto g(v + p_0) - g(p_0)$$

   linear ist.

(4)

Abgabe: Mittwoch, 2.5.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.