Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

29. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen. $b_1, \dots, b_n$ sei eine Basis von V. Zeigen Sie:

    (a) f ist genau dann surjektiv, wenn $f(b_1), \dots, f(b_n)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

    (b) f ist genau dann injektiv, wenn $f(b_1), \dots, f(b_n)$ linear unabhängig sind.

    (6)

30. Sei K ein Körper. Eine Teilmenge $G \subset K^2$ heißt (affine) Gerade, wenn es einen von Null verschiedenen Vektor $(a, b) \in K^2$ und eine Zahl $c \in K$ gibt, so daß
$$G = \{(x, y) \in K^2 \mid ax + by = c\}$$
    Zwei Geraden G_1 und G_2, die durch die Vektoren (a_1, b_1) bzw. (a_2, b_2) gegeben sind, heißen parallel, wenn die Vektoren (a_1, b_1) und (a_2, b_2) linear abhängig sind. Zeigen Sie: Zwei nicht parallele Geraden besitzen genau einen Schnittpunkt. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Die Vektoren (a_1, b_1) und (a_2, b_2) sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren (a_1, a_2) und (b_1, b_2) linear unabhängig sind. Sie sind dann sogar erzeugend.) (7)

31. Bestimmen Sie jeweils eine Basis der folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$:
$$U_1 := \mathrm{Span}(\{(1, 1, -1), (-1, -1, -1), (-1, -1, -3), (1, 1, -3)\})$$
$$U_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = -x_4\}$$
    Bestimmen Sie jeweils Elemente der kanonischen Basis, die zusammen mit den angegebenen Basen von U_1 und U_2 Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ ergeben. (4)

32. Betrachten Sie folgende Vektoren im Vektorraum $\mathbb{Q}^2$:

$$w_1 = (1,2) \qquad w_2 = (2,1) \qquad w_3 = (1,-1)$$

Entscheiden Sie in den folgenden drei Fällen, ob es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ mit der Eigenschaft $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ gibt:

(a) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)$

(b) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (-1,1,0)$

(c) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,1,0)$

Entscheiden Sie in jedem dieser Fälle auch, ob eine solche lineare Abbildung durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist. (3)

Abgabe: Mittwoch, 10.1.2001, 12.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.