Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2000/2001
Blatt 7

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

25. Sei M eine endliche Menge und U eine Teilmenge von M. Zeigen Sie, daß U endlich ist. (5)

26. Sei K eine Menge mit zwei Elementen, genannt 0 und 1. Wir führen auf K eine Addition und eine Multiplikation wie folgt ein:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Zeigen Sie, daß K mit diesen Operationen ein Körper ist. (Hinweis: Versuchen Sie, bei der Verifikation der Axiome effizient, aber logisch vollständig zu arbeiten.) (4)

27. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (2y - z, x - y, x + y - z)$$

Zeigen Sie, daß f linear ist. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Ke}(f)$ und von $\mathrm{Bi}(f)$. (5)

28. Wir betrachten die reellen Zahlen als Vektorraum über den rationalen Zahlen. Zeigen Sie, daß die Vektoren 1, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, daß $\sqrt{7}$ keine Linearkombination von $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ ist. (Hinweis: Benutzen Sie Ihre Schulkenntnisse über die binomischen Formeln, die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und die Darstellbarkeit von rationalen Zahlen als gekürzte Brüche, also mit teilerfremdem Zähler und Nenner. Kann die Quadratwurzel einer Primzahl rational sein?) (6)

Abgabe: Mittwoch, 13.12.2000, 12.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.