Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2000/2001
Blatt 6

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

21. Sei G eine Gruppe. Für $g \in G$ sei
$$L_g : G \to G, h \mapsto gh$$
die Linksmultiplikation mit g. Zeigen Sie, daß L_g bijektiv ist und daß die Abbildung
$$L : G \to \mathrm{Bij}(G, G), g \mapsto L_g$$
ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. (Hinweis: Dieser Homomorphismus wird auch als Cayley-Darstellung bezeichnet. Er zeigt, daß jede endliche Gruppe zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe isomorph ist.) (5)

22. Sei G eine Gruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. Für $g \in G$ sei
$$K_g : N \to N, n \mapsto gng^{-1}$$
die Konjugation mit g.
    (a) Zeigen Sie, daß K_g ein Automorphismus, also ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist.
    (b) Zeigen Sie, daß die Abbildung
    $$K : G \to \mathrm{Aut}(N), g \mapsto K_g$$
    ein Gruppenhomomorphismus in die Gruppe $\mathrm{Aut}(N)$ aller Automorphismen von N ist.
    (c) Konstruieren Sie ein Beispiel für einen Normalteiler in einer Gruppe, für den die Abbildung K nicht injektiv ist. (6)

23. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(-x) = f(x)$ gilt. Sie heißt ungerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ gilt.

(a) Zeigen Sie, daß die Mengen F_G und F_U aller geraden bzw. aller ungeraden Funktionen Untervektorräume des Raumes $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, daß jede Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion dargestellt werden kann, und daß diese Darstellung eindeutig ist. (5)

24. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Betrachte die Menge

$$V_a := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = a\}$$

Bestimmen Sie diejenigen Zahlen $a \in \mathbb{R}$, für die V_a ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist. (4)

Abgabe: Mittwoch, 6.12.2000, 12.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.