Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2000/2001
Blatt 5

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

17. Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgende Formel für die Summe der ersten Quadratzahlen:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad (4)$$

18. Die Menge $G := \{1, -1\}$ ist eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Betrachten Sie die Gruppenhomomorphismen
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$$
und
$$g : \mathbb{Z} \to G, n \mapsto (-1)^n$$
Zeigen Sie, daß f ein Kern von g ist. (Hinweis: Sie brauchen nicht zu beweisen, daß G eine Untergruppe und daß f und g Gruppenhomomorphismen sind.) (5)

19. (a) Finden Sie eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. (2)
    (b) Finden Sie eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist. (3)

    (Hinweis: Benutzen Sie bei dieser Aufgabe Ihre Schulkenntnisse über die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.)

20. Zeigen Sie den Satz von Cantor: Eine Menge läßt sich nicht surjektiv auf ihre Potenzmenge abbilden.

    (Hinweis: Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$ eine hypothetische surjektive Abbildung. Betrachten Sie die Menge $\{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ und argumentieren Sie wie beim Russellschen Paradoxon.) (6)

Abgabe: Mittwoch, 29.11.2000, 12.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Sprechstundenänderung:
Tanja Hogger: Mi 13.00, Café Gumbel
Astrid Tischer: Mi 13.00, Café Gumbel