Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2000/2001
Blatt 4

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

13. (a) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathrm{Bij}(M, M)$ der bijektiven Abbildungen einer Menge M in sich mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

    (b) Geben Sie im Fall der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ die Gruppentafel von $\mathrm{Bij}(M, M)$ an. (4)

14. Sei M die Menge $\{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $\mathrm{Bij}(M, M)$. Bestimmen Sie weiter, welche dieser Untergruppen normal sind. (Hinweis: Bestimmen Sie zunächst alle zweielementigen Untergruppen.) (6)

15. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir definieren auf $\mathbb{C}$ eine Addition
$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, ((a, b), (a', b')) \mapsto (a + a', b + b')$$
und eine Multiplikation
$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, ((a, b), (a', b')) \mapsto (aa' - bb', ab' + a'b)$$

    (a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{C}$ mit diesen Strukturen ein Körper ist.

    (b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wenn man die Multiplikation mit Skalaren durch
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (r, (a, b)) \mapsto (ra, rb)$$
definiert.

    (c) Setze $i := (0, 1)$. Zeigen Sie, daß jedes Element $z \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung $z = x1 + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ hat.

    (d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$ und alle Lösungen der Gleichung $z^2 = i$ mit $z \in \mathbb{C}$.

(Hinweis: Geben Sie alle Daten, wie etwa das Einselement, explizit an. Für die Inversenbildung ist es nützlich, das Produkt von (a, b) mit $(a, -b)$ zu berechnen. Der Körper $\mathbb{C}$ heißt der Körper der komplexen Zahlen.) (6)

16. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Auf der Menge $V_{\mathbb{C}} := V \times V$ führen wir eine Addition

$$+ : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, ((v, w), (v', w')) \mapsto (v + v', w + w')$$

und eine Multiplikation mit Skalaren

$$\cdot : \mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, ((a, b), (v, w)) \mapsto (av - bw, bv + aw)$$

ein. Zeigen Sie, daß $V_{\mathbb{C}}$ mit diesen Strukturen ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.(4)

Abgabe: Freitag, 17.11.2000, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.

Sprechstunden der Übungsgruppenleiter und Korrektoren:
A G: Nach der Übungsgruppe
D H: Nach der Übungsgruppe
T H: Mi 13.00, Computerraum 121
A R: Nach der Übungsgruppe
Y S : Di 13.15, Raum 426
A T: Mi 13.00, Computerraum 121