Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2000/2001
Ferienblatt

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

45. Zeigen Sie, daß es einen Gruppenhomomorphismus $f : \mathbb{Z}/(3) \to \mathbb{Z}/(3)$ mit der Eigenschaft $f(\bar{n}) = \bar{n}^3$ für alle $\bar{n} \in \mathbb{Z}/(3)$ gibt. (3)

46. Sei K ein Körper. Die Charakteristik von K ist die kleinste positive Zahl n mit der Eigenschaft, daß $n1_K := 1_K + 1_K + \ldots + 1_K = 0_K$ (n Summanden) gilt. Wenn es kein solches n gibt, sagt man, daß K die Charakteristik Null habe. Zeigen Sie, daß die Charakteristik von K eine Primzahl ist, sofern sie ungleich Null ist. (3)

47. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, \bar{x} \mapsto e^{2\pi ix}$$

ein wohldefinierter, injektiver Gruppenhomomorphismus ist, dessen Bild der Einheitskreis S^1 ist.

(Hinweis: $\mathbb{C}^*$ bezeichnet die multiplikative Gruppe von $\mathbb{C}$; $\mathbb{R}$ wird als additive Gruppe aufgefaßt. Bei der Lösung der Aufgabe kann die sog. Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

hilfreich sein, die Sie verwenden können.) (3)

48. Sei U ein Unterraum des endlichdimensionalen Vektorraumes V. Wir nennen den Unterraum

$$U^\perp := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

des Dualraums das orthogonale Komplement von U.

(a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit der Eigenschaft, daß $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von U ist. Zeigen Sie, daß $v_{m+1}^*, \ldots, v_n^*$ eine Basis von $U^\perp$ ist.

(b) Zeigen Sie: $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ (4)

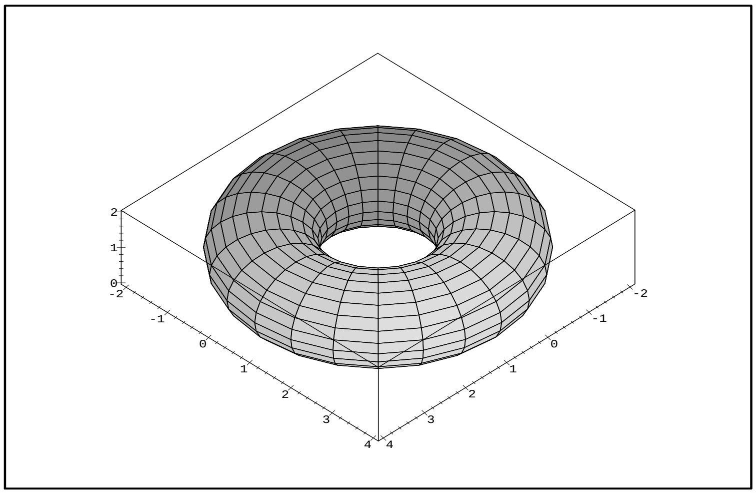
49. Zeigen Sie, daß die Menge $(X^2+1) := \{p(X^2+1) \mid p \in \mathbb{R}[X]\}$ ein Ideal in dem Polynomring $\mathbb{R}[X]$ ist. Zeigen Sie weiter, daß die Abbildung

$$\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \to \mathbb{C}, \overline{p(X)} \mapsto p(i)$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von Vektorräumen und ein Isomorphismus von Körpern ist und daß (X^2+1) ein maximales Ideal des Polynomrings ist. (4)

50. Ein Torus $T \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert als die Menge

$$T = \{ \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\psi) \\ (2+\cos(\varphi))\sin(\psi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \Big| 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi \}$$



(a) Betrachten Sie die Restklassengruppe $\widetilde{T} := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Geben Sie eine bijektive Abbildung $f : \widetilde{T} \to T$ an und bestimmen Sie die induzierte Gruppenstruktur auf T.

(b) Sei Q das (abgeschlossene) Quadrat

$$Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 0 \leq x, y \leq 1\}$$

Zeigen Sie, daß man eine Äquivalenzrelation auf Q erhält, wenn man $(x,y) \sim (u,v)$ setzt, falls eine der folgenden Bedingungen vorliegt:

(i) $x = u$ und $y = v$
(ii) $x = u$ und $y = 0$ und $v = 1$
(iii) $x = u$ und $y = 1$ und $v = 0$
(iv) $x = 0$ und $u = 1$ und $y = v$
(v) $x = 1$ und $u = 0$ und $y = v$

Zeigen Sie, daß die Einbettung $\iota : Q \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung $g : Q/\sim \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert und daß g bijektiv ist.

Finden Sie einen Isomorphismus zwischen T und $S^1 \times S^1$. (6)

Abgabe: Mittwoch, 25.4.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.