Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

WS 2000/2001
Blatt 11

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

41. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der Basis v_1, v_2, v_3.

    (a) Zeigen Sie, daß die Vektoren

    $$v_1' = v_1 + 2v_2 \qquad v_2' = 2v_1 + v_2 \qquad v_3' = 2v_3$$

    ebenfalls eine Basis von V bilden.

    (b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix von der Basis v_1, v_2, v_3 auf die Basis v_1', v_2', v_3'.

    (c) Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3 (in Bild- und Urbildraum) die darstellende Matrix

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

    besitzt. Bestimmen Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis v_1', v_2', v_3'. (5)

42. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit der Basis v_1, v_2, v_3. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3 (in Bild- und Urbildraum) die darstellende Matrix

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

    besitzt. Bestimmen Sie Basen v_1', v_2', v_3' und v_1'', v_2'', v_3'' von V so, daß die darstellende Matrix bezüglich dieser Basen Normalform hat, d. h. daß außerhalb der Diagonale nur Nullen stehen und in der Diagonale zunächst nur Einsen und dann nur Nullen. (5)

43. Entscheiden Sie, ob es reelle Matrizen M und N mit $MN = E_2$ und $NM = E_3$ gibt. (Hinweis: E_2 und E_3 bezeichnen die Einheitsmatrizen der jeweiligen Größe. Welche Größe müssen M und N haben, damit man sie wie angegeben multiplizieren kann?) (5)

44. (a) Sei U eine Untergruppe der additiven Gruppe von $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß es eine ganze Zahl n gibt, so daß $U = n\mathbb{Z}$ ist, d. h. so daß U gerade aus den Vielfachen von n besteht.

    (b) Seien n und m zwei ganze Zahlen. Zeigen Sie, daß

$$U := \{am + bn \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

    eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie weiter, daß $U = t\mathbb{Z}$ für den größten gemeinsamen Teiler t von m und n ist.

    (Hinweis: Benutzen Sie die Division mit Rest für ganze Zahlen, die in Aufgabe 40 für Polynome verwendet wurde. Beachten Sie, daß der größte gemeinsame Teiler nur bis auf das Vorzeichen eindeutig ist, wir verwenden den positiven.) (5)

Abgabe: Mittwoch, 31.1.2001, 12.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.