Lineare Algebra und analytische Geometrie I

37. Sei $V = \mathrm{Span}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n über dem Körper K. Die formale Ableitung ist der durch

$$D(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) := \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

definierte Endomorphismus D von V. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von D bezüglich der Basis $1, x, x^2, \ldots, x^n$. (Hinweis: Hier und im folgenden brauchen Sie nicht zu beweisen, daß die angegebenen Abbildungen linear sind, daß ihre Definitions- und Wertebereiche Vektorräume sind, und daß es sich bei den angegebenen Vektoren wirklich um Basen handelt.)

(5)

38. Die Unterräume

$$V := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$
$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

von $\mathbb{Q}_3$ bzw. $\mathbb{Q}_4$ haben die Basen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}_3 \to \mathbb{Q}_4, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_3}{2})$$

den Unterraum V in den Unterraum W abbildet, und bestimmen Sie die darstellende Matrix der entstehenden linearen Abbildung bezüglich der angegebenen Basen. (Hinweis: Aus Platzgründen wurden zur Definition von V, W und f Zeilenvektoren verwendet. Bitte arbeiten Sie mit Spaltenvektoren.) (4)

39. Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Durch die Matrizenmultiplikation erhalten wir eine lineare Abbildung

$$L : K_2^2 \to K_2^2, B \mapsto AB$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus sog. Matrixeinheiten. (5)

40. Seien $p, q \in K[x]$ zwei Polynome mit Koeffizienten in dem Körper K. Wir nehmen an, daß $\mathrm{grad}(p) \geq \mathrm{grad}(q)$ ist. Wir definieren folgendermaßen eine Folge von Polynomen: Wir setzen $p_1 = p$ und $p_2 = q$. Sind p_n und p_{n+1} mit $\mathrm{grad}(p_n) \geq \mathrm{grad}(p_{n+1})$ schon definiert, so sei p_{n+2} der bei der Division von p_n durch p_{n+1} auftretende Rest:

$$p_n = a_n p_{n+1} + p_{n+2}, \quad \mathrm{grad}(p_{n+1}) > \mathrm{grad}(p_{n+2})$$

Das Verfahren endet, wenn bei einer dieser Divisionen der Rest Null auftritt. Zeigen Sie, daß das letzte auftretende Polynom, das nicht Null ist, ein größter gemeinsamer Teiler von p und q ist, also ein Teiler von p und q, der von jedem anderen gemeinsamen Teiler geteilt wird. (Hinweis: Das hier beschriebene Verfahren ist der sog. euklidische Algorithmus. Überlegen Sie sich, daß ein Teiler t von p und q, der in der Form $t = ap + bq$ darstellbar ist, ein größter gemeinsamer Teiler sein muß. Begründen Sie auch kurz, warum das Verfahren überhaupt abbricht.) (6)

Abgabe: Mittwoch, 24.1.2001, 12.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.