Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2000
Blatt 11

Übungen zu Einführung in die Kategorientheorie

Aufgabe 41. (1) Ein Gruppenhomomorphismus $f : G \longrightarrow H$ ist eine Abbildung mit $f(g_1g_2) = f(g_2), (\forall g_1, g_2 \in G)$.
Zeigen Sie: f erhält das neutrale Element und inverse Elemente.
(2) Finden Sie zwei Monoide M und N und eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$, die $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)(\forall g_1, g_2 \in M)$ erfüllt, die aber nicht das neutrale Element erhält.

Aufgabe 42. Gruppen in **Gr**, der Kategorie der Gruppen, sind genau die abelschen Gruppen.

Aufgabe 43. Bestimmen Sie die Struktur einer Kogruppe auf einer abelschen Gruppe A aus der Tatsache, daß $\mathrm{Hom}(A, B)$ für alle abelschen Gruppen B eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 44. (1) In der Kategorie der kommutativen Algebren ist das Tensorprodukt $A \otimes B$ von zwei Algebren (mit der üblichen Addition und der Multiplikation $(\sum a_i \otimes b_i)(\sum c_j \otimes d_j) = \sum a_ic_j \otimes b_id_j$) das Koprodukt.
(2) Für eine kommutative Algebra A sei $G_a(A) := \{a \in A\}$. Zeigen Sie: G_a : **kommAlg** $\longrightarrow$ **Me** ist ein darstellbarer kovarianter Funktor.
(3) Sei G das darstellende Objekt von G_a. Zeigen Sie: G ist eine Kogruppe in der Kategorie der kommutativen Algebren mit der Addition auf $G_a(A)$ als Gruppenoperation.
(4) Bestimmen Sie $\Delta : G \longrightarrow G \otimes G, \varepsilon : G \longrightarrow K$ und $S : G \longrightarrow G$. (Bem: $(G, \Delta, \varepsilon, S)$ ist ein Beispiel für eine kommutative und kokommutative Hopfalgebra.)

Abgabe: Dienstag, 18. Juli 2000 in der Vorlesung