Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2000
Blatt 7

Übungen zu Einführung in die Kategorientheorie

Aufgabe 25. In **Vek** und in **Gr** gibt es beliebige kategorielle Produkte.

Aufgabe 26. Zeigen Sie: In der Kategorie aller Körper gibt es im allgemeinen keine kategoriellen Produkte. Es gilt jedoch $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

Aufgabe 27. Sei ${}_RM$ ein R-Linksmodul. Zeigen Sie:

(1) Für jede abelsche Gruppe A ist $\mathrm{Hom}(M, A)$ ein R-Rechtsmodul vermöge der Multiplikation $(fr)(m) := f(rm)$.
(2) $\mathrm{Hom}(M, \text{-}) : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathrm{Mod}\text{-}R$ ist ein kovarianter Funktor.
(3) Der Funktor $\mathrm{Hom}(M, \text{-})$ besitzt einen linksadjungierten Funktor $\text{-} \otimes_R M : \mathrm{Mod}\text{-}R \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

Aufgabe 28. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen.

(1) Sei $(X_i | i \in I)$ eine Familie von topologischen Räumen, sei X eine Menge und seien $f_i : X \longrightarrow X_i$ Abbildungen. Zeigen Sie: es gibt genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so
  (a) daß die Abbildungen $f_i : X \longrightarrow X_i$ stetig sind und
  (b) daß für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $f : Y \longrightarrow X$ diese Abbildung f genau dann stetig ist, wenn alle $f_i \circ f$ stetig sind.
(2) In **Top** gibt es zu jeder Familie von topologischen Räumen $(X_i | i \in I)$ ein kategorielles Produkt $\prod_{i \in I} X_i$.

Abgabe: Dienstag, den 20.06.2000 11:15 Uhr in der Vorlesung