Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2000
Blatt 4

Übungen zu Einführung in die Kategorientheorie

Aufgabe 13. Zeigen Sie, daß die Kategorie der Ringe (mit Einselement) **Ri** keinen Kogenerator besitzt. (Hinweis: Zeigen Sie für einen Kogenerator C zunächst $\mathbf{R}i(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, C) \neq \emptyset$ und $\mathbf{R}i(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, C) \neq \emptyset$ und leiten Sie daraus einen Widerspruch her.)

Aufgabe 14. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine natürliche Transformation. Zeigen Sie: φ ist ein natürlicher Isomorphismus genau dann, wenn alle $\varphi(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ (für alle $X \in \mathcal{C}$) Isomorphismen in $\mathcal{D}$ sind.

Aufgabe 15. Charakterisieren Sie diejenigen Morphismen $f : A \to B$, für die die natürliche Transformation

$$\mathcal{C}(f,\text{-}) : \mathcal{C}(B,\text{-}) \to \mathcal{C}(A,\text{-})$$

ein natürlicher Monomorphismus ist. (Eine natürliche Transformation $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt natürlicher Monomorphismus, wenn für alle Funktoren $\mathcal{H}$ und alle natürlichen Transformationen $\psi, \rho : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ gilt $\varphi\psi = \varphi\rho \Longrightarrow \psi = \rho$.)

Aufgabe 16. Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbf{Me}$ der kovariante Funktor mit $\mathcal{F}(Y) = \{*\}$ für alle $Y \in \mathcal{C}$. Seien $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt und $x_0 \in \mathcal{F}(X)$ so gegeben, daß für jedes Objekt $Y \in \mathcal{C}$ und jedes Element $y \in \mathcal{F}(Y)$ genau ein Morphismus $f : X \to Y$ so existiert, daß $\mathcal{F}(f)(x_0) = y$ gilt. Zeigen Sie, daß dann X ein Anfangsobjekt in $\mathcal{C}$ ist.

Abgabe Dienstag, den 30.5.2000 11:15 Uhr in der Vorlesung