Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2000
Blatt 2

Übungen zu Einführung in die Kategorientheorie

Aufgabe 5. (1) Zeigen Sie, daß die Kategorie der abelschen Gruppen **Ab** eine Unterkategorie der Kategorie der Gruppen **Gr** ist. Ist die Unterkategorie voll?

(2) Zeigen Sie, daß die Kategorie der Monoide **Mon** eine Unterkategorie der Kategorie der Halbgruppen **Hgr** ist. Ist die Unterkategorie voll?

Aufgabe 6. (1) Bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge einer Menge X. Für eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ sei $\mathcal{P}(f)(A) := f(A)$ für jede Teilmenge A von X. Zeigen Sie, daß damit $\mathcal{P} : \mathbf{Me} \longrightarrow \mathbf{Me}$ ein kovarianter Funktor ist.

(2) Bezeichne $\mathcal{Q}(X)$ ebenfalls die Potenzmenge einer Menge X. Für eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ sei $\mathcal{Q}(f)(B) := f^{-1}(B)$ für jede Teilmenge B von Y. Zeigen Sie, daß damit $\mathcal{Q} : \mathbf{Me} \longrightarrow \mathbf{Me}$ ein kontravarianter Funktor ist.

Aufgabe 7. Für einen Vektorraum V sei $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum zu V. Für einen Vektorraumhomomorphismus $f : V \longrightarrow W$ sei $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ der Homomorphismus mit $f^*(\omega)(v) := \omega(f(v))$. Zeigen Sie, daß damit $-^* : \mathbf{Vek} \longrightarrow \mathbf{Vek}$ ein kontravarianter Funktor wird.

Aufgabe 8. Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ kovariante Funktoren. Die Komma-Kategorie $(\mathcal{F} \downarrow \mathcal{G})$ ist die Kategorie mit Tripeln (A, f, B) als Objekten, wobei $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(B)$ in $\mathcal{E}$ sind. Die Morphismen bestehen aus Paaren $(g, h) : (A, f, B) \longrightarrow (A', f', B')$ mit $(g : A \longrightarrow A', h : B \longrightarrow B')$ in $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \arrow[r, "\mathcal{F}(g)"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}(A') \arrow[d, "f'"] \\
\mathcal{G}(B) \arrow[r, "\mathcal{G}(h)"] & \mathcal{G}(B')
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie, daß dieses eine Kategorie ist.

Abgabe Dienstag, den 16.5.2000 11:15 Uhr in der Vorlesung