

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE**

**Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Matematica e Informatica**

**SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI**

**Settore di Fisica Matematica**

**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

**Percorso Formativo Comune**

**TESI DI LAUREA**

**Tempi d'attesa, ricorrenza e dimensione  
in sistemi dinamici ergodici**

Relatore: Prof. Gianfausto Dell'Antonio

Corelatore: Dott. Stefano Galatolo

Laureando: Pietro Peterlongo

**ANNO ACCADEMICO 2005-2006**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
	Note . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Sistemi dinamici: una teoria di esempi</b>	<b>13</b>
	2.1 Stabilità strutturale ed uniforme iperbolicità . . . . .	17
	2.2 Dagli attrattori strani alle misure SRB . . . . .	21
	2.3 Decadimento delle correlazioni . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Teoria ergodica: concetti di base</b>	<b>31</b>
	3.1 Teorema di Poincaré . . . . .	32
	3.2 Sistemi ergodici . . . . .	33
	3.3 Teorema di Kac . . . . .	34
	3.4 Leggi statistiche asintotiche di ritorno e di attesa . . . . .	36
	3.5 Teorema di Birkhoff . . . . .	39
	3.6 Mescolamento . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Disuguaglianze tra indicatori e dimensione</b>	<b>43</b>
	4.1 Definizioni e notazioni preliminari . . . . .	43
	4.2 Tempi d'attesa come limite superiore . . . . .	45
	4.3 Tempi d'attesa in sistemi rapidamente mescolanti . . . . .	47
	4.4 Ricorrenza come limite inferiore . . . . .	53
	4.5 Ricorrenza in sistemi rapidamente mescolanti . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Esempi e note</b>	<b>59</b>
	5.1 Rotazioni sulla circonferenza . . . . .	59
	5.2 Altri esempi ed osservazioni sparse . . . . .	62
	5.3 Una simulazione su Maple . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Borel-Cantelli</b>	<b>75</b>

*Indice*

---

<b>B</b>	<b>Dimensione locale</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Entropia metrica</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>95</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

*“Mais si l’on a peur de la science, c’est surtout  
parce qu’elle ne peut nous donner le bonheur.  
Évidemment non, elle ne peut pas nous le donner,  
et l’on peut se demander si la bête ne souffre  
pas moins que l’homme.”*[continua . . .]

*Henri Poincaré, Le Valeur de la Science*

La ricorrenza nei sistemi dinamici si studia dalla fine del diciannovesimo secolo quando la teoria dei sistemi dinamici fu creata da Poincaré. Un risultato di base ma fondamentale è il Teorema di Ricorrenza di Poincaré. Esso afferma che un sistema dinamico che conserva una misura finita esibisce una ricorrenza non banale in ogni insieme di misura positiva. Più precisamente sia  $T : X \rightarrow X$  una trasformazione misurabile e sia  $\mu$  una misura di probabilità  $T$ -invariante su  $X$ . Se  $A \subset X$  è un insieme misurabile di misura positiva allora per quasi ogni  $x$  si ha che  $T^n x \in A$  per infiniti  $n$ .

Questa informazione è però solo di natura qualitativa e non risponde alle seguenti domande naturali:

- I. Con che frequenza un'orbita visita un dato insieme di misura positiva?
- II. Dopo quanto tempo un dato punto ritorna in intorni arbitrariamente piccoli di sé stesso?

Il Teorema Ergodico di Birkhoff<sup>1</sup> ci fornisce una risposta completa al primo quesito: il tempo medio che quasi ogni punto trascorre nell'insieme è pari alla misura dello stesso insieme. Il secondo quesito ha suscitato crescente interesse negli ultimi quindici anni, anche in connessione con altri campi tra

---

<sup>1</sup>Di cui l'enunciato preciso sarà dato nella sezione 3.

cui lo studio di algoritmi di compressione e lo studio numerico di sistemi dinamici caotici.

Un punto impiega un tempo sempre maggiore ad entrare in intorni sempre più piccoli di sé stesso (o meglio il tempo sarà una funzione non decrescente rispetto ad una famiglia di intorni decrescenti); la velocità di crescita del tempo di ricorrenza è l'oggetto di studio della ricorrenza quantitativa e il legame con altre caratteristiche del sistema dipende dal tipo di intorni che si scelgono per l'analisi. Se si considerano i cilindri generati da una partizione del sistema (vedi appendice C) si avranno legami con l'entropia del sistema; motivazioni ed applicazioni si hanno nell'ambito dello studio di algoritmi di compressione. Noi considereremo la famiglia di intorni dati dalle palle associate ad una distanza ed i nostri risultati ci daranno informazioni sulle caratteristiche dimensionali dello spazio, che supporremo dunque metrico; avremo interesse ad applicare questi risultati allo studio numerico di sistemi dinamici caotici, i quali hanno spesso attrattori di tipo frattale.

Una nozione di ricorrenza non banale (non necessariamente periodica) ci permette dunque di studiare una nozione di dimensione non banale (non necessariamente intera).

Una spiegazione intuitiva di quanto accade si può dare tramite il Teorema di Kac, il quale fornisce il valore medio del tempo di ricorrenza dei punti di un insieme  $A$  di misura positiva. Sia  $\tau_A(x)$  il minimo intero per cui  $T^n x \in A$ , minimo che esiste finito per quasi ogni  $x$  in  $A$  grazie al Teorema di Poincaré. Diremo ergodico<sup>2</sup> un sistema per il quale  $\tau_A$  è finito per quasi ogni  $x \in X$ . Il Teorema di Kac afferma che in un sistema ergodico  $\mathbf{E}_A[\tau_A] = \mu(A)^{-1}$ , dove con  $\mathbf{E}_A$  si intende la speranza condizionata rispetto alla misura indotta  $\mu_A(\cdot) = \mu(\cdot \cap A)/\mu(A)$ . Prendiamo ora  $A = B_r(x)$  la palla di raggio  $r$  centrata in  $x$  e assumiamo che il valore medio  $\mathbf{E}_{B_r(x)}[\tau_{B_r(x)}]$  si avvicini al valore  $\tau_{B_r(x)}(x)$  assunto nel centro della palla con il diminuire del raggio. Allora si avrà che per  $r \rightarrow 0$  asintoticamente<sup>3</sup>  $\tau_{B_r(x)} \approx (1/r)^{d_\mu(x)}$  dove l'esponente del membro di destra è la *dimensione locale* della misura definita come  $d_\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \log \mu(B_r(x)) / \log r$  (ci si aspetta sia costante per spazi dimensionalmente omogenei).

Alla nozione di ricorrenza affiancheremo quella di tempo d'attesa che la generalizza ed al contempo svolge un ruolo 'duale' rispetto ad essa. Più pre-

---

<sup>2</sup>Questa è una definizione equivalente a quella standard come si mostra nella sezione 3; d'altra parte la definizione di ergodicità è abituata a subire qualche maltrattamento (vedi le note alla fine di questo capitolo).

<sup>3</sup>La relazione asintotica che si considera qui è quella che esprime l'andamento esponenziale asintotico ed è data dal limite del rapporto dei logaritmi:  $f(r) \approx g(r)$  per  $r \rightarrow 0$  se e solo se  $\lim_{r \rightarrow 0} \log(f(r)) / \log(g(r)) = 1$ .

---

cisamente presi  $x, y \in X$  definiamo *indicatore di tempo di attesa* la quantità<sup>4</sup>:

$$R(y, x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_{B_r(x)}(y))}{\log(1/r)}$$

Nel caso particolare in cui  $y$  sia uguale ad  $x$ ,  $R(x, x)$  sarà detto *indicatore di ricorrenza*.

Vedremo nel capitolo 4 che in un sistema dinamico ergodico vale:

$$R(x, x) \leq d_\mu(x) \leq R(y, x)$$

Dove la prima disuguaglianza<sup>5</sup> si ha per quasi ogni  $x$ , mentre la seconda per quasi ogni  $y$  fissato  $x$ .

Una volta appurato ciò il nostro obiettivo sarà quello di rispondere alle seguenti domande:

1. Quali ipotesi ci permettono di ottenere delle uguaglianze?
2. Esistono esempi in cui le disuguaglianze sono strette?

La nostra risposta alla prima domanda è: *mescolamento rapido*. L'ipotesi di mescolamento è un rafforzamento dell'ipotesi di ergodicità e dice che due sottoinsiemi tendono a diventare asintoticamente indipendenti tramite la dinamica. Il mescolamento si dirà rapido se il decadimento della correlazione tra i due insiemi avviene a velocità superpolinomiale<sup>6</sup>.

La risposta alla seconda domanda è: *sì*, anche se non esistono molti controesempi.

È importante sottolineare il fatto che i metodi qui studiati suggeriscono immediatamente un algoritmo per calcolare la dimensione locale di attrattori strani di sistemi caotici. Iterando il sistema si determina il tempo di attesa affinché un punto preso a caso entri in una palla di dato raggio intorno ad un punto fissato sull'attrattore; se ne riportano alcuni valori per una scelta di raggi decrescente su un grafico log-log: la pendenza della retta che meglio approssima i dati fornisce una stima della dimensione locale della misura nel punto scelto.

Nel capitolo 2 forniamo le motivazioni ed alcuni esempi per lo studio successivo e raccontiamo in maniera informale alcuni risultati importanti della

---

<sup>4</sup>Per ora supporremo l'esistenza dei limiti in questione più avanti la discussione sarà resa completamente rigorosa trattando separatamente i limiti superiori ed inferiori.

<sup>5</sup>Per la prima disuguaglianza non c'è bisogno dell'ipotesi di ergodicità ma basta che il sistema conservi la misura. La seconda disuguaglianza vale anche se la misura totale è infinita (sistemi ergodici infiniti).

<sup>6</sup>Bisognerà aggiungere ipotesi di regolarità sugli insiemi considerati, altrimenti è possibile decadimenti arbitrariamente lenti in un qualsiasi sistema, vedi sezioni 2.3 e 3.6.

teoria dei sistemi dinamici caotici, quali la nozione di iperbolicità (uniforme e non), le misure statistiche naturali in un sistema dissipativo<sup>7</sup>, e gli attrattori strani. Questo sforzo di comprensione sarà premiato alla fine da una rassegna sulla velocità di decadimento delle correlazioni, mostrando come l'ipotesi di mescolamento rapido è verificata in molti dei casi di interesse, ma non è valida in generale.

Il capitolo 3 introduce in maniera rigorosa i concetti di base della teoria ergodica; si dimostrano i teoremi di Poincaré e Kac, si enuncia il teorema di Birkhoff e si discute la definizione di sistema ergodico e di sistema mescolante. Inoltre nella sezione 3.4 introdurremo le leggi statistiche asintotiche per i tempi di ritorno e di attesa in eventi 'rari'. Questo permetterà di enunciare un risultato di 'dualità' tra tempi di attesa e ricorrenza.

Nel capitolo 4 i teoremi A e B danno la nostra risposta alla prima domanda: si hanno le uguaglianze per sistemi rapidamente mescolanti. Si dimostrano diverse altre proposizioni ausiliarie.

Nel capitolo 5 diamo la risposta alla seconda domanda. Le rotazioni su una circonferenza sono un sistema ergodico qualora l'angolo sia in rapporto non razionale con l'angolo giro. Se questo rapporto è però bene approssimabile dai numeri razionali il sistema fornisce un controesempio rispetto al comportamento atteso. Inoltre discutiamo una serie di esempi, applicazioni e risultati collegati ai teoremi del capitolo 4.

Infine giungiamo alle conclusioni (capitolo 6) dove oltre ad una analisi del lavoro svolto si indicano altre direzioni in cui è possibile continuare ad investigare.

Vi sono tre appendici che trattano argomenti tecnici che completano il testo. L'appendice A discute i lemmi di Borel-Cantelli. L'appendice B discute il legame tra varie caratteristiche di tipo dimensionale ed il ruolo svolto dalla dimensione locale. Infine l'appendice C introduce il concetto di entropia ed enuncia il teorema di Shannon-McMillan-Breiman ed il teorema di Ornstein-Weiss.

## Note

1. La memoria di Poincaré in cui compare il celebre Teorema di Ricorrenza è la famosa *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, vincitrice della competizione internazionale indetta da Oscar II, re di Svezia e di Norvegia. Considerata il primo manuale di teoria qualitativa dei sistemi dinamici<sup>8</sup>, la memoria pubblicata nel 1890 negli *Acta Mathematica* è in realtà molto diversa da

---

<sup>7</sup>Dette anche misure SRB dove l'acronimo sta per Sinai, Ruelle e Bowen.

<sup>8</sup>Vedi [Ho90].

---

quella giudicata vincitrice dalla commissione composta da Mittag-Leffler, Hermite e Weierstrass. Alcuni dei risultati principali per il quale la memoria è nota oggi-giorno non sono presenti nella versione originale e furono aggiunti solo in seguito alla scoperta di un errore significativo, errore che permise a Poincaré di dare quella che è considerata la prima descrizione matematica di comportamento caotico in un sistema dinamico. Per maggiori dettagli vedere [B-G97] e [Go93].

Il Teorema di Ricorrenza è presente in entrambe le versioni e, diversamente dalle osservazioni sui punti omoclinici trasversali, la sua importanza fu riconosciuta immediatamente dai contemporanei. Si trova nel capitolo sugli invarianti integrali<sup>9</sup> e recita:

**TEOREMA:** *Si suppone che le coordinate  $x_1, x_2, x_3$  di un punto  $P$  nello spazio rimangano finite, e che l'integrale invariante  $\iiint dx_1 dx_2 dx_3$  esista; allora per una qualsiasi regione  $r_0$  nello spazio, per quanto piccola, ci saranno traiettorie che la attraversano infinitamente spesso. Ovvero, in un qualche tempo futuro il sistema ritornerà arbitrariamente vicino alla situazione iniziale e lo farà infinitamente spesso.*

Poincaré lo utilizza in relazione al problema della stabilità delle soluzioni del problema dei tre corpi ristretto (ma le considerazioni valgono per un qualsiasi sistema hamiltoniano). Più precisamente egli estende una sua precedente nozione di stabilità (e la attribuisce a Poisson): un sistema si dirà stabile secondo Poisson se ritorna infinitamente spesso in posizioni arbitrariamente vicino alla posizione iniziale. Dunque il teorema implica che un sistema con tre gradi di libertà che conserva il volume ha un numero infinito di soluzioni che sono Poisson-stabili.

Oltre a queste ‘rassicuranti’ applicazioni alla stabilità del sistema solare, il teorema ha suscitato anche qualche controversia come quella che vide protagonisti Zermelo e Boltzmann sulle pagine degli *Annalen der Physik* nel 1896<sup>10</sup>. L’argomento di Zermelo, volto ad intaccare la validità generale della seconda legge della termodinamica, sosteneva che poiché il teorema di Poincaré implica l’impossibilità di processi irreversibili l’entropia di un sistema non può essere sempre crescente. L’esempio di Zermelo consiste in un gas costretto in una parte di un contenitore stagno: una volta lasciato libero a sé stesso si diffonderà in tutto il contenitore e l’aspetto paradossale si ha dalla certezza che in un tempo finito il gas ritorni spontaneamente ad essere confinato nella regione iniziale. Boltzmann, lungi dal confutare il teorema di Poincaré, obiettava all’argomento di Zermelo che la natura statistica della sua teoria cinetica prediceva che i momenti di calo dell’entropia sarebbero stati talmente lontani da non essere osservabili in pratica.

Si consideri il seguente semplice esempio degli Ehrenfest che coinvolge un numero relativamente piccolo di particelle. Si hanno due urne, una contiene 100

---

<sup>9</sup>La teoria degli invarianti integrali introdotta da Poincaré qualche anno prima, è equivalente alla teoria delle trasformazioni che conservano una misura (almeno quando questa misura è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue), enunciata in modo da non dover utilizzare il concetto di misura, che ancora non esisteva.

<sup>10</sup>In [Br66] si trova una traduzione degli articoli di Zermelo e Boltzmann.

palline numerate e l'altra è vuota; ogni secondo scegliamo un numero a caso tra 1 e 100 e spostiamo la pallina con quel numero dall'urna in cui si trova nell'altra urna. Seconda la nostra intuizione, e la seconda legge della termodinamica, il sistema tenderà ad avere lo stesso numero di palline, 50 e 50, in entrambe le urne, anche se ci saranno delle fluttuazioni intorno allo stato di equilibrio. Il teorema di Poincaré d'altronde ci assicura che prima o poi sicuramente tutte le palline torneranno nell'urna di partenza. Una stima sul tempo di ricorrenza (detto anche ciclo di Poincaré) ci viene data dal teorema di Kac ed è effettivamente astronomica:  $2^{100}$  secondi.

2. Il termine ergodico deriva da una interpretazione delle idee di [Bo1898], prima tramite il lavoro degli [Eh59] e successivamente con Von Neumann e Birkhoff.

Boltzmann definisce un 'monodo' come 'una distribuzione di probabilità sullo spazio delle fasi, invariante rispetto all'evoluzione temporale'; la parola, una delle tante inventate da Boltzmann, è di origine greca formata da  $\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$  (unico) e da  $\epsilon\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$  (aspetto, sembianza) ed esprime l'immutabilità dell'aspetto del sistema. Successivamente, nell'ambito dei sistemi Hamiltoniani chiama 'ergodo' ( $\acute{\epsilon}\rho\gamma\omicron\nu$ , energia) un monodo caratterizzato da una distribuzione uniforme su una superficie di energia costante.

La locuzione 'ergodico' pare venga dal lavoro degli Ehrenfest, che nella loro opera di interpretazione e divulgazione delle idee di Boltzmann chiamano 'ergodici' i sistemi in cui le superfici di energia costante sono costituite da una sola traiettoria (che Boltzmann chiama 'isodici' da  $\iota\sigma\omicron$  e  $\omicron\delta\acute{o}\varsigma$ , via, percorso) e fanno curiosamente derivare la parola 'ergodo' da  $\acute{\epsilon}\rho\gamma\omicron\nu$  ed  $\omicron\delta\acute{o}\varsigma$ . Essi introducono anche l'ipotesi 'quasi-ergodica' per la quale ogni traiettoria riempie densamente la superficie di energia costante.

Né l'ipotesi ergodica, né quella quasi ergodica riescono tuttavia a rendere conto della proprietà più importante che si richiede ad un sistema ergodico, ovvero la cosiddetta uguaglianza tra la media temporale e la media spaziale di un osservabile. Questo è il contenuto dell'importante e difficile Teorema ergodico di Birkhoff ([Bir31]) che assicura la convergenza quasi ovunque della media temporale di un osservabile alla sua media spaziale. Il lavoro di Birkhoff viene stimolato dall'annuncio di un risultato di [vN32] che mostra la più debole convergenza in norma  $L^2$ . In entrambi i lavori l'ipotesi cruciale è detta 'transitività metrica' ed era già stata introdotta nell'ambito dei sistemi dinamici da Birkhoff e Smith. Su suggerimento di Von Neumann si decide di chiamare ergodico un sistema con la proprietà di transitività metrica e da allora il termine ha acquisito questo significato.

Quanto riportato sopra è contenuto essenzialmente in [Gall81], [Ma74] e [Ma80] ai quali si rimanda per ulteriori informazioni.

Riguardo alla connessione tra ipotesi ergodica e i fondamenti della meccanica statistica si rimanda a [Sz96].

3. I primi risultati pionieristici sulla ricorrenza quantitativa sono [OrWe93] e [Bos93]. Il primo dà un risultato completo sulla convergenza dell'indicatore di

---

ricorrenza in cilindri all'entropia del sistema<sup>11</sup>. Il secondo articolo tratta invece di ricorrenza in palle sempre più piccole e stabilisce un risultato parziale al riguardo, essenzialmente individuando l'indicatore di ricorrenza come limite inferiore alla dimensione.

Il primo articolo che dimostra l'uguaglianza tra ricorrenza e dimensione è [BaSa01], in cui le ipotesi sul sistema sono abbastanza tecniche e coprono il caso dei sistemi iperbolici; al riguardo vedere anche [Bar05]. L'articolo [STV02] ottiene risultati nel caso di sistemi unidimensionali con ipotesi molto deboli, mentre [ACS03] rappresenta un approccio diverso al legame tra ricorrenza e dimensione. I primi risultati sui tempi di attesa sono in [Ga05] dove viene mostrato come i tempi d'attesa forniscano un limite superiore alla dimensione e si ha l'uguaglianza ponendo ipotesi abbastanza ragionevoli sulla statistica dei tempi di ritorno; successivamente in [Ga06] si ottengono dei risultati analoghi a quelli di [BaSa01] per il caso dei tempi d'attesa.

Recentemente si sono riusciti ad ottenere risultati sotto la debole ipotesi di sistemi rapidamente mescolanti che generalizzano quanto fatto in precedenza: [Sa06] per la ricorrenza e [Ga $\infty$ ] per i tempi d'attesa. Questi risultati sono quelli di cui ci occuperemo nella tesi.

La spiegazione intuitiva della relazione asintotica tra ricorrenza e dimensione tramite il teorema di Kac si trova in diversi articoli, ad esempio [HLMV02].

L'algoritmo per il calcolo della dimensione locale è menzionato in [BaSa01]; esperimenti numerici per diverse mappe che usano ricorrenza e tempi d'attesa come stime superiore ed inferiore si trovano in [CaGa06]. [HaJe04] è un articolo divulgativo nell'ambito della letteratura fisica che tratta della stessa questione con metodi diversi.

---

<sup>11</sup>Vedi l'appendice C.



## Capitolo 2

# Sistemi dinamici: una teoria di esempi

Un sistema dinamico è il modello astratto di un sistema che evolve nel tempo secondo una legge immutabile<sup>1</sup>. La scoperta che un tale oggetto matematico possa fornire informazioni precise riguardo ad un qualche aspetto della realtà si deve a Newton il quale mostrò come la legge gravitazionale regola il moto dei pianeti del sistema solare<sup>2</sup>. Raggiunta la maturità con Poincaré, lo studio dei sistemi dinamici acquista una sua indipendenza all'interno della matematica, ed in seguito agli sviluppi degli ultimi quarant'anni si situa ormai<sup>3</sup> come saldo punto di riferimento nel luogo di incontro di analisi, geometria, topologia, probabilità e fisica matematica.

Parallelamente si definisce e si amplia il campo delle possibili applicazioni che ormai comprende quasi ogni branca della scienza e della tecnologia; grazie alla contemporanea ascesa del pervasivo paradigma della scienza nonlineare si possono ormai citare, oltre alla fisica che diede l'impulso iniziale, l'ecologia, la meteorologia, l'economia, l'informatica, la chimica, la biologia. . .<sup>4</sup>

Per fornire un esempio di sistema dinamico bisogna indicare essenzialmente due cose:

- i) Uno spazio delle fasi  $X$ : ogni punto rappresenta un possibile stato

---

<sup>1</sup>Riferimenti generali per questa sezione: [St94], [Jo05], [Pet], [KaHa95], [You98a], [Vi05].

<sup>2</sup>Sia la legge gravitazionale sia il suggerimento di applicarla per ricavarne le leggi di Keplero sono dovuti a Hooke, anche se il lavoro matematico effettivo fu svolto da Newton; per chi non conoscesse questa storia poco nota la lettura di [Arn90] potrebbe rivelarsi entusiasmante.

<sup>3</sup>La *Mathematics Subject Classification* contiene la sezione 37 dei sistemi dinamici solo dal 2000.

<sup>4</sup>Per sperimentare il fascino di una splendida presentazione teorica concentrata sulle applicazioni si legga [St94], altrimenti si può consultare [Enc04].

del sistema ed a un dato momento tutte le proprietà del sistema si possono recuperare dalla conoscenza del singolo stato. Il sistema viene osservato attraverso funzioni su  $X$  a valori reali, dette osservabili.

ii) Una legge di evoluzione nel tempo. Il tempo può essere considerato discreto o continuo. Nel primo caso l'evoluzione avviene iterando una mappa  $T$  ed il sistema che parte dallo stato  $x_0$  dopo  $n$  passi si troverà nello stato  $T^n x_0$ ; nel secondo caso si parla di flusso e l'evoluzione è solitamente data nella forma di una equazione differenziale o di un campo vettoriale su una varietà<sup>5</sup>.

Un primo esempio:  $X_1$  rappresenta le posizioni e le velocità di  $n$  punti materiali, modello adeguato per la descrizione del moto dei pianeti del sistema solare; osservabili sono ad esempio la posizione e la velocità ma anche la distanza di due pianeti o l'energia cinetica del sistema (supposte assegnate le masse). Il sistema dinamico è continuo e le equazioni di Newton forniscono la dinamica.

Un secondo esempio:  $X_2$  è un numero che rappresenta la quantità di una popolazione in un dato ecosistema (per esempio la popolazione umana sulla terra); si possono dare diverse leggi di evoluzione sia continue che discrete. Consideriamo la seguente legge discreta detta anche mappa logistica<sup>6</sup>:  $Tx = cx(1 - x)$  con  $c$  costante positiva.

Un terzo esempio:  $X_3$  rappresenta tutti i possibili stati della atmosfera terrestre ad un dato istante fatti evolvere tramite le leggi di evoluzione atmosferica<sup>7</sup>. Tra gli osservabili abbiamo per esempio la posizione e la velocità di ogni molecola di acqua o di ossigeno, la quantità di pioggia che cade in un dato momento sulla torre di Pisa, la velocità della bora sul golfo di Trieste.

Gli esempi, che provengono da diversi campi delle scienze<sup>8</sup>, sono differenti sotto molti punti di vista: immediato è constatare la diversa dimensione dello spazio delle fasi (finita, 1,  $\infty$ ); notiamo inoltre che il primo è un sistema hamiltoniano, il secondo coinvolge una mappa non invertibile dunque rappresenta un processo irreversibile ed il terzo, bé il terzo a rigore non è neanche ben definito, ma al suo interno si possono trovare numerosi sottosistemi approssimati da modelli ben studiati quali l'equazione di Navier-Stokes

---

<sup>5</sup>Non diamo dettagli visto che ci occuperemo solo del caso discreto.

<sup>6</sup>La mappa logistica è la più semplice generalizzazione nonlineare della crescita esponenziale ( $Tx = cx$ ) e si comporta allo stesso modo per piccole popolazioni ma prevede un limite massimo di crescita (che si può supporre pari a 1 rinormalizzando opportunamente) vicino al quale la popolazione inverte la tendenza è diminuisce. Uno dei primi e più famosi resoconti sulla mappa logistica è [May76].

<sup>7</sup>Supponiamo l'esistenza sia dello spazio delle fasi che della legge di evoluzione; benché ci siano ignoti questo atteggiamento si rivela proficuo e ci permette di cercare di ottenere informazioni su particolari osservabili: ci sarà il sole domenica?

<sup>8</sup>I primi tre della lista precedentemente data.

---

per un fluido viscoso od il modello di Rayleigh per la convezione termica in un fluido.

Tutti i sistemi proposti sotto determinate condizioni esibiscono una *dinamica aperiodica caratterizzata da estrema sensibilità alle condizioni iniziali*, ovvero quello che negli anni '70 è divenuto universalmente noto come Caos. Questo fenomeno generale della dinamica si manifesta nei sistemi dissipativi con la tendenza di una parte del sistema ad avvicinarsi ad un insieme invariante detto attrattore<sup>9</sup>, la cui forma geometrica non sempre può essere descritta con i preesistenti concetti di punto di equilibrio o ciclo limite, ma necessita degli strumenti che Mandelbrot (sempre negli anni '70) chiamerà geometria frattale.

Nell'ambito del terzo esempio fondamentale è il contributo di Lorenz del '63 ([Lo63]). Dubitando della estrema fiducia che i meteorologi all'epoca riponevano nelle potenzialità della predizione tramite analisi numerica, egli considera una versione molto semplificata<sup>10</sup> del modello di Rayleigh per la convezione di un fluido (meccanismo che regola la formazione di alte e basse pressioni atmosferiche) e riesce a intuire dal punto di vista teorico l'insita inaffidabilità di un sistema numerico di previsione meteorologica<sup>11</sup>. Se questo articolo è emblematico del risveglio di interesse nei fenomeni caotici, il successivo studio della mappa logistica (esempio 2), effettuato da Feigenbaum a partire dal '75, che lo portò alla stupefacente scoperta dell'universalità quantitativa nella distanza tra i valori di successive biforcazioni (di un certo tipo detto period-doubling) che portano un sistema a sviluppare un regime caotico, rappresenta la legittimazione incontestabile per lo studio del caos deterministico<sup>12</sup>.

Al fine di descrivere i sistemi a cui possono essere applicati i risultati argomento di tesi, non ci interessa occuparci delle varie strade che portano al caos partendo da situazioni note, oggetto di studio della teoria delle biforcazioni di cui si potrebbe parlare a proposito del secondo esempio, nè commenteremo oltre il caos hamiltoniano prodotto nei sistemi conservativi a cui abbiamo accennato appena parlando di Poincaré e del nostro primo esempio, bensì

---

<sup>9</sup>Per una definizione del concetto di attrattore vedi 2.2

<sup>10</sup>Anche e soprattutto a causa delle limitate risorse numeriche disponibili al tempo. Il lavoro di Lorenz è un esempio eccellente di come si possa incrementare fortemente la propria comprensione di un fenomeno con l'ausilio di tecniche minimali.

<sup>11</sup>Fatto che oggi si può constatare senza difficoltà guardando in successione un sito di previsioni meteo su internet e fuori dalla finestra.

<sup>12</sup>Studio che può essere proseguito, oltre che sul già (più volte) citato [St94] anche su [ASY96]; si veda anche [Sp03] per una presentazione con mezzi tecnici ridotti ma decisamente informativa sui fenomeni caotici ed i metodi usati per riprodurli e studiarli. Infine, disponibile come WebBook [CAMTV] è una piacevole presentazione orientata verso i fisici.

discuteremo nel seguito del caos generico e pienamente formato che abbonda nelle scienze naturali, incontrato da Lorenz nei suoi studi meteorologici ed oggetto del nostro terzo esempio.

Per fare ciò bisogna prima affrontare lo studio di una classe di sistemi dinamici molto importante, quella dei sistemi *strutturalmente stabili*, ovvero che rimangono qualitativamente gli stessi per piccole perturbazioni; un ragionamento molto azzardato ci può far supporre che se il caos è effettivamente un fenomeno così abbondante da poter essere incontrato per caso come accade a Lorenz<sup>13</sup> dovrà pur essere stabile in un qualche senso. In effetti questa classe contiene al suo interno l'esempio del più semplice sistema caotico, il famoso ferro di cavallo che Smale 'trovò' sulla spiaggia di Rio di Janeiro in un intervallo tra una nuotata e l'altra<sup>14</sup>. Successivamente lo stesso Smale, trovandosi a Kiev per ricevere la medaglia Fields (per i suoi lavori in topologia sulla congettura di Poincaré) ha modo di discutere a lungo con Anosov e dalle loro chiacchierate emerge il concetto di sistemi uniformemente iperbolici, originariamente chiamati 'Axiom A' (in onore di Anosov) ed un programma per il loro studio venne delineato da Smale in un articolo del 1967 sul Bulletin of AMS<sup>15</sup>. Il coronamento di questo programma è opera di diversi matematici e porta alla dimostrazione della congettura di Palis-Smale per cui la classe dei sistemi uniformemente iperbolici con una ipotesi aggiuntiva, detta condizione di trasversalità forte, coincide con la classe dei sistemi strutturalmente stabili.

Al programma di Smale, ovvero teoria geometrica dei sistemi dinamici, si è poi affiancato l'approccio probabilistico o della teoria ergodica, introdotto qualche anno più tardi da Sinai e Ruelle. Al momento la sintesi di questi due punti di vista sta producendo i primi risultati generali sul fenomeno del caos robusto e generico associato ad esempi come quello di Lorenz<sup>16</sup>.

I due approcci geometrico e probabilistico alla teoria nota come dinamica iperbolica sono l'oggetto delle prossime sottosezioni, dove cercheremo di fornire una traccia sottile ma persistente che ci permetta di spiegare alla fine della sezione quale tipo di sistemi ha decadimento delle correlazioni esponenziale e quali altri tipi di decadimento sono possibili. Siamo aiutati in questo da alcuni recenti articoli espositivi i cui autori sono voci tra le più autorevoli al riguardo: [Sm98], [Ru06], [Vi00], [You02]<sup>17</sup>.

---

<sup>13</sup>Che ebbe però il grandissimo merito di accorgersene, cosa che fece anche perché, in un certo senso, lo andava cercando.

<sup>14</sup>Nello stesso periodo in cui al MIT di Boston Lorenz simulava le sue equazioni su di un Royal McBee LGP-30.

<sup>15</sup>[Sm67], che Ruelle ha definito 'a masterpiece of mathematics'.

<sup>16</sup>Vedi sottosezione 2.2.

<sup>17</sup>Inutile dire che si tratta delle prime letture consigliate in merito agli argomenti di

Un ultimo commento: abbiamo detto che l'evoluzione di un sistema dinamico si può confezionare con un tempo discreto oppure continuo. Assaggeremo quasi esclusivamente<sup>18</sup> il caso discreto, ma per quanto concerne le applicazioni dei risultati che otterremo, specificatamente l'algoritmo per il calcolo della dimensione locale, questi si estendono immediatamente al caso continuo in quanto basta considerare il flusso ad un intervallo di tempo fissato. D'altra parte un sistema continuo numericamente integrato (per esempio con un metodo di Runge-Kutta del quart'ordine) non è che l'iterazione di una mappa.

## 2.1 Stabilità strutturale ed uniforme iperbolicità

Un sistema dinamico liscio si dice *strutturalmente stabile* se è equivalente ad ogni altro sistema in un intorno  $C^1$ . Nel caso discreto<sup>19</sup> questo vuol dire che il diffeomorfismo  $f$  della varietà  $M$  sarà coniugato tramite un omeomorfismo globale<sup>20</sup> ad ogni diffeomorfismo in un intorno  $C^1$ . L'esempio più semplice è un diffeomorfismo nell'intorno di un punto fisso ed il teorema di Hartman-Grobman ci dice che una condizione sufficiente per la stabilità è che il differenziale nel punto fisso sia una mappa lineare iperbolica, ovvero ristretta ad un qualsiasi sottospazio non deve mai essere una rotazione, ovvero non deve avere autovalori di modulo 1, ovvero il tangente nel punto fisso si deve decomporre in un sottospazio in cui la mappa contrae i vettori ed un altro in cui li espande. Questo esempio locale, detto punto fisso iperbolico, produce però una dinamica poco interessante, passiamo dunque ad un gradino di complessità superiore.

Il ferro di cavallo di Smale rappresenta forse l'esempio dinamico caotico più semplice possibile, in quanto equivalente all'idealizzazione matematica del più semplice fenomeno casuale, l'esperimento del lancio di una moneta. Più precisamente<sup>21</sup> esso è un insieme invariante<sup>22</sup> di una mappa definita geometricamente (vedi figura 2.1) la cui proprietà essenziale è che la dinamica ristretta ad esso è equivalente (cioè coniugata topologicamente) allo shift di

---

questa sezione, visto che tra l'altro sono tutte e quattro facilmente reperibili sulla Rete. Dopo (parecchio dopo) si passi pure al libro [Vi05], nato dalla richiesta di Ruelle di un survey sugli sviluppi recenti.

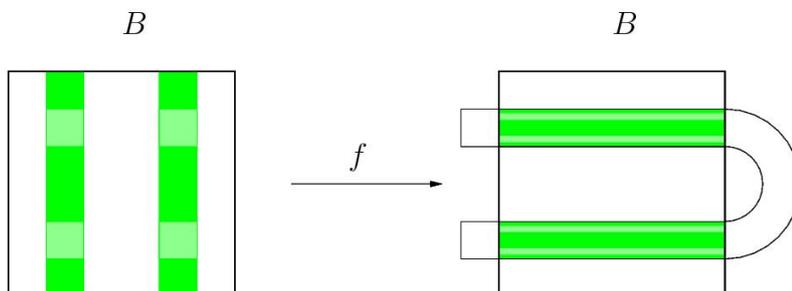
<sup>18</sup>Tranne che nel capitolo 5 dove si considereranno riparametrizzazioni di flussi.

<sup>19</sup>D'ora in avanti se non precisiamo altrimenti ci riferiremo sempre al caso discreto.

<sup>20</sup>Preso  $g$  nell'intorno esiste  $h : M \rightarrow M$  omeomorfismo tale che  $h \circ f = g \circ h$ .

<sup>21</sup>Ma non andremo molto nei dettagli per i quali rimandiamo a [Sm98] e [Shu05].

<sup>22</sup>Non è un attrattore, bensì una sella strana, geometricamente un insieme di Cantor.



**Figura 2.1:** La mappa del ferro di cavallo di Smale:  $B$  è un quadrato;  $f$  allunga  $B$  nella direzione orizzontale e lo comprime nella direzione verticale, piegando poi il rettangolo che risulta nella forma di un ferro di cavallo. Le strisce verticali verdi sono mandate nelle strisce orizzontali verdi; in verde chiaro è mostrato il risultato di una seconda iterazione. La mappa è così definita solo parzialmente su un insieme iperbolico invariante ( $\Lambda = \bigcap_{-\infty}^{\infty} f^i B$ ) che è un insieme di Cantor, ma si può estendere, ad esempio, su una sfera.

Bernoulli, ovvero l'applicazione che agisce sulle successioni infinite di due simboli ( $a_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ ) tramite aumento dell'indice ( $a_i \mapsto a_{i+1}$ ). Nello stabilire questo fatto<sup>23</sup>, Smale lega indissolubilmente il campo della dinamica caotica con lo studio di shift su insiemi di successioni, ovvero il campo della dinamica simbolica<sup>24</sup>.

Il ferro di cavallo è un insieme invariante di un diffeomorfismo che in ogni suo punto contrae lo spazio in una direzione e lo allunga nell'altra; le contrazioni ed espansione sono uniformi. In generale per un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  di una varietà compatta si dà la seguente:

**Definizione 2.1.1.** Un insieme invariante compatto  $\Lambda \subset M$  è un *insieme iperbolico* per  $f$  se il fibrato tangente su  $\Lambda$  ammette una decomposizione

<sup>23</sup>Smale produsse il suo esempio guardando in maniera geometrica le equazioni studiate durante la seconda guerra mondiale da Cartwright e Littlewood, i quali mostrarono la presenza di un comportamento inusuale ed inaspettato in equazioni legate alle onde radio che sorgono naturalmente in ingegneria. La storia incredibile di come Smale venne a conoscenza di queste equazioni, di come allo stesso tempo scoprì i dimenticati lavori di Poincaré sui punti omoclinici (che implicano la presenza di un ferro di cavallo) e di come sempre in Brasile venne a contatto con i lavori dei russi Andronov e Pontrjagin sulla stabilità strutturale, va assolutamente letta in [Sm98]. È stupefacente il ruolo che il caso (o la fortuna?) ha giocato nel portare alla luce un ferro di cavallo.

<sup>24</sup>Questo ha poi portato Sinai, Ruelle e Bowen allo sviluppo dei metodi noti come formalismo termodinamico ([Ru78]) tramite l'analogia con le tecniche della meccanica statistica usate nei modelli di spin. La dinamica simbolica è studiata anche in informatica teorica, specificatamente nell'ambito dello studio di algoritmi di compressione da cui è sorto il lavoro di Ornstein e Weiss su ricorrenza ed entropia.

continua (ed i sottospazi della decomposizione si dicono stabili ed instabili)

$$T_x M = E^i \oplus E^s$$

invariante per il differenziale  $((Df)E^{i,s} = E^{i,s})$  e tale che  $\|Df^{-1}|_{E^i}\| \leq \lambda$  e  $\|Df|_{E^s}\| \leq \lambda$  per una qualche costante  $\lambda < 1$  e per una scelta di una metrica Riemanniana sulla varietà.

Un punto  $x$  è *non-vagante* per  $f$  se per ogni suo intorno  $U$  c'è un intero  $n \geq 1$  per cui  $f^n(U)$  interseca  $U$ . L'insieme dei punti non-vaganti contiene l'insieme dei punti periodici, nonché gli insiemi  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite di ogni orbita, e viene indicato con  $\Omega(f)$ .

**Definizione 2.1.2.** Un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  è uniformemente iperbolico (o Axiom A) se  $\Omega(f)$  è un insieme iperbolico per  $f$  e l'insieme dei punti periodici è denso in esso.

L'esempio più semplice di diffeomorfismo uniformemente iperbolico è la mappa al tempo 1 di un flusso di gradiente su una varietà privo di punti critici degeneri. In questo caso  $\Omega(f)$  è un insieme finito di punti fissi iperbolici. Un esempio simile al ferro di cavallo è il solenoide di Smale (vedi figura 2.2) che è un attrattore. Esempi di diffeomorfismi in cui  $\Omega(f)$  è tutta la varietà sono la mappa del gatto di Arnold e la mappa al tempo 1 del flusso geodetico su una superficie di curvatura negativa costante (ottenuta ad esempio come quoziente compatto del piano iperbolico). Questi ( $\Omega(f) = M$ ) sono detti sistemi di Anosov, poichè fu lui a mostrare che sono uniformemente iperbolici, cioè i punti periodici sono densi, e che sono strutturalmente stabili.

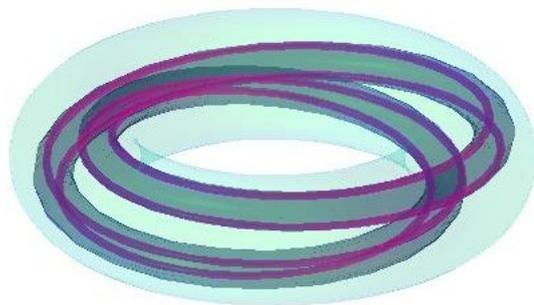
Smale mostra che il ferro di cavallo è stabile, ed insieme a Palis isola la condizione di trasversalità forte, che impone un'intersezione trasversale tra le varietà stabili e instabili di due punti. Precisiamo meglio considerando i seguenti insiemi al variare di  $x \in M$

$$\begin{aligned} V^s(x) &= \{y \in M : d(f^n x, f^n y) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty\}, \\ V^i(x) &= \{y \in M : d(f^n x, f^n y) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow -\infty\}. \end{aligned}$$

Il teorema di Hadamard-Perron (vedi [KaHa95]) implica che sono varietà immerse.

**Definizione 2.1.3.** Un sistema soddisfa la condizione di *trasversalità forte* se per ogni  $x, y \in \Omega(f)$  si ha che  $V^s(x)$  e  $V^i(y)$  sono trasversi.

Con questa ipotesi aggiuntiva Palis e Smale dimostrano che i sistemi uniformemente iperbolici in cui  $\Omega(f)$  è finito (detti Morse-Smale) sono strutturalmente stabili e congetturano che sia la condizione mancante per identificare le due classi. Che l'ipotesi aggiuntiva sia sufficiente per la stabilità viene



**Figura 2.2:** Il solenoide di Smale: la mappa è definita sul toro solido  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ . Geometricamente può essere descritta in questa maniera: seziono il toro verticalmente, tiro la ciambella facendole fare due giri e riattacco le facce, componendo il tutto con una compressione perpendicolare alla superficie del toro. Analiticamente può essere espressa, usando coordinate  $(\phi, x, y)$  nel modo seguente:  
 $(\phi, x, y) \mapsto (2\phi \pmod{2\pi}, x/10 + (\cos \phi)/2, y/10 + (\sin \phi)/2)$ .

mostrato da Robbin e Robinson ed infine Mañé completa la dimostrazione della congettura di stabilità nella metà degli anni ottanta:

**Teorema 2.1.** *Un diffeomorfismo  $C^1$  su una varietà compatta è strutturalmente stabile se e solo se è uniformemente iperbolico e verifica la condizione di trasversalità forte.*

La teoria esposta non ci permette di trattare i fenomeni caotici che si incontrano naturalmente nel campo applicato della scienza nonlineare, ma per spiegare la sua importanza ed al contempo introdurre quanto seguirà nella prossima sezione concludiamo questa sezione con due paragrafi tratti dalla prefazione di [Vi05]:

... perlopiù dai sessanta alla metà degli anni ottanta, si sviluppò una teoria dei sistemi uniformemente iperbolici la cui importanza si estese molto oltre gli obiettivi originali. Era parte di una rivoluzione nella nostra visione del determinismo, guidata fortemente dalle osservazioni tratte dalle scienze sperimentali, che frantumò la classica opposizione tra evoluzioni deterministiche ed evoluzioni casuali. La teoria uniformemente iperbolica fornì le fondamenta matematiche per l'evidenza che i sistemi deterministici, anche dotati di pochi gradi di libertà, esibiscono spesso un comportamento caotico in una veste robusta. Quindi condusse alla conclusione quasi paradossale che il "caos" possa essere stabile.

D'altra parte si realizzò presto che la stabilità strutturale e l'iperbolicità uniforme sono proprietà meno universali di quanto si credesse

inizialmente: esistono molte classi di sistemi che sono non iperbolici ed instabili in maniera robusta, ed infatti ciò accade spesso per modelli specifici provenienti da applicazioni concrete. Il sogno di un paradigma generale per i sistemi dinamici fu rimandato.

## 2.2 Dagli attrattori strani alle misure SRB

I grandi successi che la matematica ottenne nelle scienze applicate tra il diciassettesimo e diciottesimo secolo si hanno tramite la soluzione esatta di equazioni, perlopiù con l'integrazione esplicita di equazioni differenziali, radicando nel senso comune dei matematici una preferenza ed una abnegazione verso lo studio dei sistemi hamiltoniani integrabili, i quali peraltro con il nome stesso danno una promessa di risultati tangibili.

Questo può forse spiegare il ritardo con cui si pervenne ad uno studio accurato dei sistemi dissipativi. In parte questo fu dovuto anche alla credenza che in tali sistemi tutte le orbite tendessero verso equilibri stabili, punti fissi o cicli limite<sup>25</sup>. In questo modo i matematici persero l'occasione di essere i primi ad osservare un attrattore strano, lasciando questo onore ad un meteorologo: Lorenz.

Il termine *attrattore* è la generalizzazione del concetto di punto fisso e ciclo limite, si tratta di un insieme chiuso invariante per la dinamica che attrae le orbite di punti vicino ad esso i quali costituiscono il suo bacino di attrazione<sup>26</sup>. Solitamente si impone che esso sia minimale, ovvero che non ci sia alcun sottoinsieme proprio che goda delle stesse proprietà. Per una definizione più precisa si consulti [Mi06]<sup>27</sup>. Mostrare l'esistenza di un attrattore che non sia costituito da un punto o da una curva è un fatto tutt'altro che banale, si pensi che solo recentemente tramite un'analisi numerica rigorosa (cioè con stime esatte degli errori) si è potuto stabilire l'esistenza dell'attrattore di Lorenz ([Tu99]).

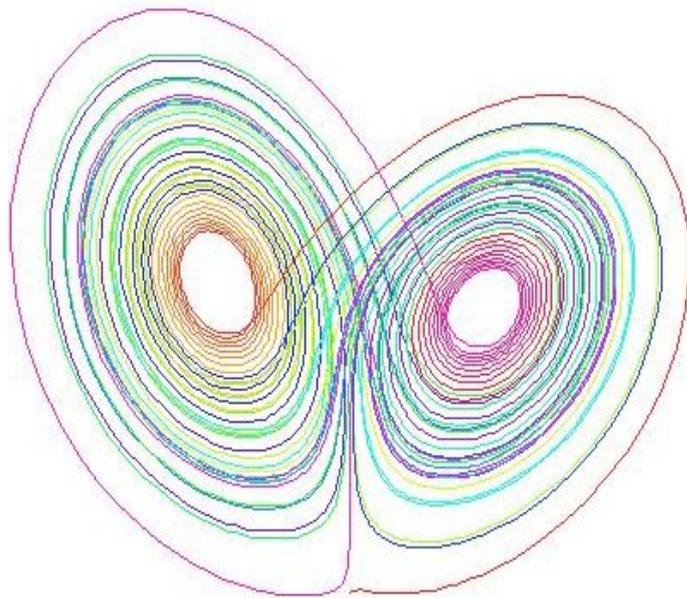
La difficoltà nello studio dell'attrattore di Lorenz, portò [Hé76] a costruire una mappa il cui attrattore sarebbe diventato il prototipo di un attrattore

---

<sup>25</sup>O salendo di dimensione, moti quasi-periodici su tori.

<sup>26</sup>Il bacino di attrazione è dunque il più grande aperto fatto di punti la cui distanza rispetto all'attrattore tende a zero quando iterati.

<sup>27</sup>L'articolo è tratto dalla nuova Scholarpedia, una enciclopedia peer-reviewed basata sull'esperienza di Wikipedia, ma i cui articoli sono redatti, controllati, curati ed aggiornati nel tempo da esperti del campo. Sulla stessa Scholarpedia si troveranno un numero crescente di altri articoli riguardo ai sistemi dinamici e le loro applicazioni. Per un riferimento sul concetto di attrattore più tradizionale ma meno aggiornato si consultino [EkRu85] e [Mi85].



**Figura 2.3:** L'attrattore di Lorenz: è disegnata un'orbita (colorata in funzione del tempo) del sistema di equazioni differenziali:  
 $\{\frac{dx}{dt} = 10(y - x), \frac{dy}{dt} = 28x - y - xz, \frac{dz}{dt} = xy - 8/3z\}$ .  
 La condizioni iniziale scelta è  $(10, -10, 10)$  e la soluzione è mostrata fino al tempo  $t = 50$ .

strano (vedi figura 2.4). Un *attrattore strano*<sup>28</sup> è un attrattore che esibisce dipendenza sensibile alle condizioni iniziali. Per chiarire quest'ultimo punto introduciamo l'importante concetto di esponente di Lyapunov, che misura l'espansione o la contrazione di un vettore infinitesimo in un punto:

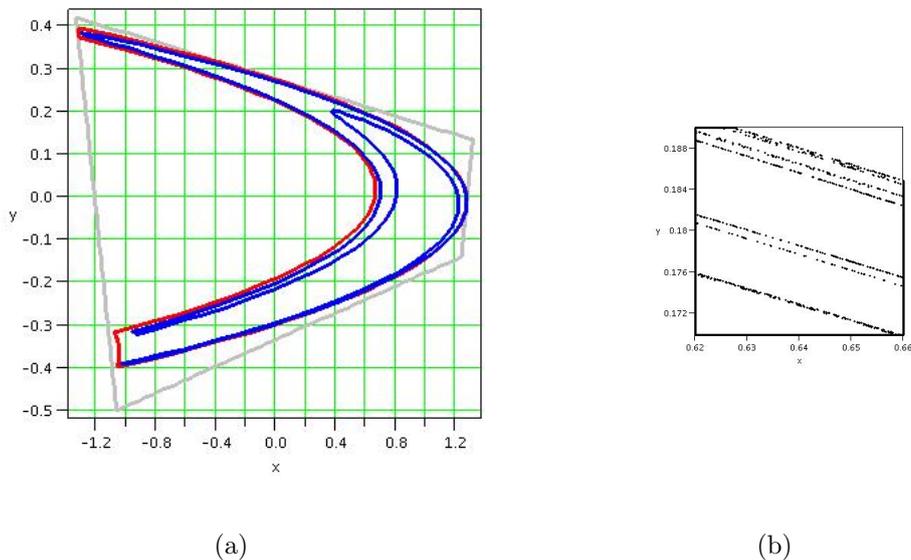
**Definizione 2.2.1.** Per un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  preso un punto  $x$  ed un vettore  $v$  nello spazio tangente si definisce *esponente di Lyapunov* in  $x$  nella direzione  $v$

$$\lambda(x, v) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n v\|,$$

con la convenzione che  $\log 0 = -\infty$ .

---

<sup>28</sup>Concetto introdotto in [RuTa71] dove l'aggettivo 'strano' era dovuto all'aspetto frattale che spesso assumeva l'attrattore, anche se ormai si ritiene che siano più importanti le caratteristiche dinamiche (caoticità) che quelle geometriche; si veda la discussione in [EkRu85]. Si noti che all'epoca Ruelle e Takens, non essendo a conoscenza del lavoro di Lorenz (che ci mise qualche tempo a diventare noto ambienti matematici), come esempi di attrattori strani conoscevano essenzialmente gli attrattori dei sistemi uniformemente iperbolici (solenoidi di Smale e poco altro).



**Figura 2.4:** La mappa di Hénon:  $(x, y) \mapsto (1 - 1.4x^2 + y, 0.3x)$ . Essa manda il quadrilatero  $U$  (di cui è mostrato il bordo in grigio) in sé stesso; sono mostrate due successive iterate in rosse e blu. Nella figura 2.4(b) è mostrato un ingrandimento di una parte dell'attrattore che mostra la struttura frattale (si veda anche la figura 5.1).

Associamo la nozione di caoticità o dipendenza sensibile alle condizioni iniziali con la presenza di esponenti di Lyapunov positivi sui punti dell'attrattore. Gli insiemi iperbolici hanno in ogni punto esponenti di Lyapunov positivi o negativi, in numero pari alla dimensione dello spazio tangente, dunque gli attrattori dei sistemi uniformemente iperbolici sono attrattori strani.

Gli esempi 'naturali' di attrattori strani non sono però uniformemente iperbolici; risulta che, per dirla con le parole di [Ru06], "per andare oltre l'iperbolicità bisogna sostituire il concetto geometrico di attrattore strano con il concetto ergodico di misura SRB".

Le misure SRB furono introdotte da Sinai, Ruelle e Bowen nello studio degli attrattori per sistemi uniformemente iperbolici. Abbiamo bisogno di una definizione tecnica che supplisca al concetto di assoluta continuità ristretto ad una sottovarietà (o meglio ad una foliazione):

**Definizione 2.2.2.** Una partizione misurabile  $\xi$  di  $M$  è detta *subordinata a*  $V^i$  se per  $\mu$ -quasi ogni  $x$  l'elemento della partizione che contiene  $x$  ( $\xi(x)$ ) è contenuto in  $V^i(x)$ . Siano  $\mu_x^\xi$  le misure condizionali di  $\mu$ , e  $m_x^\xi$  la restrizione della misura Riemanniana di  $V^i(x)$  su  $\xi(x)$ . Una misura si dice che ha *misure*

condizionali assolutamente continue sulle varietà instabili se ha esponenti di Lyapunov positivi q.o. e se per ogni partizione misurabile  $\xi$  subordinata a  $V^i$  si ha che  $\mu_x^\xi \ll m_x^\xi$  per  $\mu$ -quasi ogni  $x$ .

Ora possiamo enunciare il risultato principale sulle misure SRB nei sistemi Axiom A:

**Teorema 2.2.** *Sia  $f$  un diffeomorfismo  $C^2$  con un attrattore uniformemente iperbolico  $\Lambda$  e indichiamo con  $U$  il suo bacino di attrazione. Allora esiste una unica misura di probabilità (boreliana) invariante  $\mu$  su  $\Lambda$  che è caratterizzata dalle seguenti condizioni, tra loro equivalenti:*

1.  $\mu$  ha misure condizionali assolutamente continue sulle varietà instabili.
2. esiste  $V \subset U$  di misura di Lebesgue piena tale che per ogni osservabile continuo  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  si ha che, preso  $x \in V$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i x) \rightarrow \int \phi d\mu \quad (2.1)$$

La misura invariante di cui si garantisce l'esistenza e l'unicità<sup>29</sup> è detta misura SRB. Si noti che la proprietà 2 è più forte del teorema di Birkhoff, poichè  $\mu$  può essere singolare rispetto a Lebesgue, come accade nei sistemi dissipativi.

La seconda condizione del teorema è quella che definisce le misure naturali o 'fisiche'. Più precisamente:

**Definizione 2.2.3.** Una misura di probabilità  $\mu$  invariante per una mappa  $f : M \rightarrow M$  si dirà *misura fisica* se per un insieme di misura positiva  $V \subset M$  si ha che per ogni osservabile continuo  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  vale (2.1) preso  $x \in V$ .

Se si adotta il punto di vista per cui insiemi di misura di Lebesgue dello spazio delle fasi corrispondono ad eventi osservabili allora una misura fisica può essere 'sperimentata' poiché governa la distribuzione asintotica delle orbite che partono da un insieme di condizioni iniziali accessibili allo sperimentatore.

La definizione di misura fisica è molto generale e non impone alcuna condizione sulla mappa  $f$ , mentre la prima condizione del teorema 2.2 dipende in modo cruciale da alcune caratteristiche geometriche del sistema: la presenza di un attrattore iperbolico e l'assoluta continuità sulle varietà instabili. Una splendida teoria dovuta a Pesin garantisce che anche la prima condizione si

---

<sup>29</sup>E non solo, nella dimostrazione del teorema se ne fa una costruzione tramite dinamica simbolica.

può indebolire e ciò permette di dare una nozione generale di misura SRB<sup>30</sup>. Questa teoria detta di non-uniforme iperbolicità parte da un teorema di Oseledec che assicura l'esistenza quasi-ovunque degli esponenti di Lyapunov e da questo procede a 'sollevare' alcuni dei 'vecchi' risultati della teoria di uniforme iperbolicità che continuano a valere in un contesto 'quasi-ovunque': per usare le parole della Young "è un poco come estendere i teoremi sulle funzioni continue alle funzioni misurabili".

La definizione generale di una misura SRB  $\mu$  si dà per  $f$  un diffeomorfismo  $C^2$  di varietà Riemanniane compatte e richiede una condizione di assoluta continuità 'misurabile' su varietà instabili 'quasi-ovunque'. Inoltre  $f$  deve avere almeno un esponente di Lyapunov positivo  $\mu$ -quasi ovunque ovvero il sistema deve avere sensibilità alle condizioni iniziali sull'insieme invariante su cui è concentrata la misura SRB. Infine

**Teorema 2.3.** *Una misura SRB ergodica e priva di esponenti di Lyapunov nulli è una misura fisica<sup>31</sup>.*

Riassumendo:

- Le misure SRB sono le misure invarianti più compatibili con il volume dello spazio delle fasi quando il volume non è conservato (sistemi dissipativi).
- Forniscono un meccanismo per spiegare come una instabilità locale sugli attrattori possa produrre statistiche coerenti per orbite che partono da grossi insiemi nel bacino di attrazione.

Armati di questo nuovo strumento astratto si va a caccia di attrattori strani, o meglio, seguendo il suggerimento di Ruelle, di attrattori che ammettano un'unica misura SRB. Per cacciare ci sono due approcci possibili: l'approccio assiomatico e l'approccio fenomenologico. Entrambi hanno recentemente ottenuto risultati entusiasmanti, l'uno risolvendo un vecchio problema, l'altro fornendo i primi eclatanti risultati in un programma di ampia portata.

L'approccio assiomatico cerca di rilassare le condizioni che definiscono i sistemi uniformemente iperbolici nella speranza di allargare sistematicamente la classe di mappe dotate di misure SRB. Sono state introdotte nozioni

---

<sup>30</sup>Non entreremo molto nei dettagli della teoria di Pesin e rimandiamo a [You02] e a [You95] per una discussione più approfondita ed ulteriori riferimenti bibliografici.

<sup>31</sup>Bisogna ovviamente aggiungere che la misura sia ergodica, altrimenti la media temporale sarà diversa sulle diverse componenti ergodiche; la condizione di ergodicità corrisponde nel nuovo contesto probabilistico alla geometrica condizione di minimalità richiesta sugli attrattori.

deboli di iperbolicità, ancora con un sapore uniforme ma dove si permette l'esistenza di direzioni invarianti 'neutrali'<sup>32</sup>. Questo tipo di caccia è riuscito finalmente a catturare la farfalla di Lorenz: Araujo, Pacifico, Pujals e Viana hanno esaminato la farfalla che era rimasta impigliata nel 'retino numerico' di Tucker ed hanno mostrato come essa potesse essere catalogata grazie alla nozione di iperbolicità singolare introdotta precedentemente da Morales, Pacifico e Pujals. L'iperbolicità singolare è un tipo particolare di esistenza di una decomposizione dominata che ammette la presenza di punti singolari sull'insieme invariante, presenza accertata da tempo nell'attrattore di Lorenz e che aveva portato Guckenheimer e Williams alla costruzione dei modelli geometrici di Lorenz. Si ottiene dunque che sia i modelli geometrici che il flusso delle equazioni di Lorenz ammettono una misura SRB ergodica e fisica; per ulteriori informazioni e riferimenti bibliografici si veda [APPV $\infty$ ].

L'approccio fenomenologico è mirato ad ottenere modelli di esempi concreti di comportamento dinamico, non necessariamente legati all'uniforme iperbolicità. Quidong Wang e Lai-Sang Young<sup>33</sup> hanno iniziato un programma per la comprensione degli attrattori di rango uno, ovvero con instabilità in una direzione e forte compressione nelle altre direzioni. I risultati su cui si basano questi lavori sono di due tipi: l'ispirazione viene dai lavori di 'hard analysis' ottenuti nello studio di mappe uno-dimensionali legati ai nomi di Misiurewicz e Jakobson<sup>34</sup> e successivamente nei pionieristici lavori sulla mappa di Hénon di Benedicks, Carleson e Young<sup>35</sup>; la generalità dei risultati ottenuti<sup>36</sup> è dovuta al contesto astratto dei sistemi 'predominantly hyperbolic' un termine non tecnico con cui la Young descrive i sistemi con parecchia espansione e contrazione su grandi parti dello spazio delle fasi, ma nessuna decomposizione globale<sup>37</sup>.

A conclusione di questa lunga tirata, che altro non è che una scarna guida alla letteratura destinata a diventare obsoleta in poco tempo, vale davvero la pena riportare un brano tratto dall'articolo [WY02] in cui si espongono i

---

<sup>32</sup>Nozioni che vanno sotto il nome di iperbolicità parziale, iperbolicità proiettiva, esistenza di una decomposizione dominata.

<sup>33</sup>Gli articoli originali sono [WY01],[WY02],[WY03],[WY $\infty$ ].

<sup>34</sup>[Mis81],[Ja81].

<sup>35</sup>Il lavoro [BeCa91] è il primo in cui si dimostra rigorosamente la presenza di un attrattore strano; il successivo [BeYo93] è il primo in cui si dimostra la presenza di una misura SRB su di un attrattore strano. Questi lavori su attrattori due-dimensionali sono a loro volta basati sullo studio delle mappe uno-dimensionali. Si vedano [You98a] e gli articoli di Wang e Young per ulteriori notizie al riguardo.

<sup>36</sup>Che li rende applicabili a diversi problemi concreti. Al riguardo si tenga d'occhio il sito della Young: l'ultimo nato è [GYW06] e sono annunciati in preparazione lavori nell'ambito PDE.

<sup>37</sup>[You98b], [You99b].

risultati concreti dell'approccio astratto di [WY01]:

In questo articolo consideriamo una equazione della forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda\left(\frac{d\theta}{dt} - 1\right) = \Phi(\theta) P_T(t)$$

dove  $\theta \in S^1$  e  $\lambda > 0$ . Se il membro destro dell'equazione è posto identicamente uguale a zero questa equazione rappresenta il moto di una particella soggetta ad una forza esterna costante che la porta a decelerare quando la sua velocità eccede uno e ad accelerare quando è sotto uno. Indipendentemente dalla condizione iniziale la particella raggiunge un moto uniforme con cui si muove con velocità pari ad uno. A questo sistema dinamico estremamente semplice aggiungiamo un'altra forza esterna in forma di *pulsazione*:  $\Phi$  è una funzione arbitraria,  $P_T$  è periodica nel tempo con periodo  $T$  e per  $t \in [0, T)$  è uguale ad 1 in un piccolo intervallo ed a 0 altrimenti. [...]

*Dimostriamo che il suddetto sistema esibisce, per diversi valori di  $\lambda$  e  $T$ , un array molto ricco di fenomeni dinamici, che includono*

- (a) *curve invarianti con comportamento quasi-periodico,*
- (b) *dinamica di tipo gradiente con equilibri stabili ed instabili,*
- (c) *caos transitorio causato dalla presenza di ferri di cavallo, con quasi ogni traiettoria che tende al limite ad un equilibrio stabile, e*
- (d) *attrattori strani con misure SRB e pieno comportamento stocastico.*

Questi risultati sono nuovi per l'equazione in questione. Come fenomeni dinamici astratti (a)-(c) sono abbastanza ben compresi e la loro presenza in modelli concreti è stata notata; si veda [GH90]. La situazione riguardo a (d) è molto diversa. L'analisi che ci permette di trattare attrattori di questo tipo non è stata disponibile se non recentemente. Questa è la prima volta, a nostra conoscenza, in cui si dimostra analiticamente che una equazione differenziale concreta possiede un attrattore globale nonuniformemente iperbolico con una misura SRB. Riteniamo il Teorema 3, che discute il caso dell'attrattore strano come il risultato principale dell'articolo.

La nostra dimostrazione del Teorema 3 si basa su [WY01], nel quale abbiamo costruito una teoria dinamica per una classe (generale) di attrattori con una direzione di instabilità e forte dissipazione. In [WY01] abbiamo identificato un insieme di condizioni che garantiscono l'esistenza di attrattori strani con forti proprietà stocastiche. Le proprietà in questione includono molte delle usuali nozioni matematiche associate con il caos: esponenti di Lyapunov positivi, entropia positiva, misure SRB, decadimento delle correlazioni esponenziali, codifica simbolica delle orbite, geometria frattale, ecc. La presenza

del suddetto scenario (d) è dimostrata controllando le condizioni in [WY01].

Una nota finale: i due approcci assiomatico e fenomenologico, la terminologia è tratta da [You02], non sono in realtà distinti, in quanto i risultati astratti sull'attrattore di Lorenz risolvono il problema grazie al lavoro numerico di Tucker; viceversa l'estrema concretezza dei risultati di Wang e Young è il risultato di un programma generale reso possibile dall'enorme potenziale della sottostante teoria dell'iperbolicità non uniforme.

## 2.3 Decadimento delle correlazioni

Preso un osservabile  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  di un sistema dinamico  $T : X \rightarrow X$  con una misura di probabilità invariante  $\mu$ , consideriamo la successione di funzioni date dall'osservabile misurato nei momenti successivi della dinamica

$$\phi, \phi \circ T, \phi \circ T^2, \dots, \phi \circ T^n, \dots$$

alla stregua di un processo stocastico, ovvero considerandola come una successione di variabili aleatorie.

In questo contesto la *legge dei grandi numeri*, per la quale si ha che quasi sicuramente

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i \rightarrow \int \phi d\mu,$$

vale per un sistema ergodico; questo non è altro che l'enunciato del Teorema di Birkhoff (vedi 3.5). Il processo stocastico è costituito da variabili aleatorie identicamente distribuite ma non indipendenti, dunque l'ergodicità rappresenta un indebolimento della condizione di indipendenza per questo particolare processo.

Un'altra nozione che dà una versione debole di indipendenza asintotica è il decadimento delle correlazioni (vedremo in 3.6 che questa nozione è equivalente al mescolamento). Dal punto di vista dinamico questa nozione probabilistica esprime la sensibilità al dato iniziale tipica dei sistemi caotici: le orbite, in un certo senso, dimenticano il proprio stato iniziale con l'andar del tempo, dunque presi due osservabili  $\phi$  e  $\psi$  la conoscenza di  $\phi(x)$  dovrebbe fornire scarsa informazione su  $\psi(T^n x)$  per  $n$  grande. Ciò si esprime tramite la *correlazione* tra gli osservabili

$$\mathcal{C}_n(\phi, \psi) = \int \phi(\psi \circ T^n) d\mu - \int \phi d\mu \int \psi d\mu \quad (2.2)$$

che dovrebbe convergere rapidamente a zero per  $n$  che va ad infinito. In generale bisogna restringersi ad un sottospazio  $\mathcal{F}$  con un minimo di regolarità. Questo perché trattiamo sistemi che in realtà sono deterministici e la perdita di memoria dovuta alla sensibilità al dato iniziale appare solo ad un livello di osservazione del sistema grossolano, attraverso quantità  $\phi, \psi$  che non distinguono i punti vicini troppo bene.

Si parla di *decadimento delle correlazioni esponenziale* nello spazio  $\mathcal{F}$  se, per ogni  $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{C}_n(\phi, \psi)$  va a zero con velocità esponenziale. Allo stesso modo si definiscono velocità di decadimento polinomiale (e si indica anche il grado) e superpolinomiale (superiore a quella di un qualunque polinomio). La nostra scelta dello spazio  $\mathcal{F}$  sarà quello delle funzioni Hölderiane. Un sistema si dirà *rapidamente mescolante* se il decadimento delle correlazioni ha velocità almeno superpolinomiale.

Una motivazione importante per studiare il decadimento delle correlazioni è che un decadimento veloce implica il *Teorema del limite centrale* ovvero che la ‘variabile aleatoria’

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i x$$

(dove  $x$  è distribuita con legge  $\mu$ ) converge in legge ad una distribuzione normale. Il teorema del limite centrale vale infatti se  $\mathcal{C}_n$  è maggiorato da una successione sommabile indipendente dalla scelta di osservabili. Per riferimenti ulteriori si veda [Bal99], [Lu04], [Vi98], [You99a] da cui traiamo anche le informazioni per la rassegna sulle velocità di decadimento che ora proponiamo.

La velocità di decadimento di default per un sistema dinamico mescolante con un qualche tipo di iperbolicità è quella esponenziale; alcune caratteristiche geometriche del sistema possono far rallentare il sistema. I principali sistemi per cui è noto il decadimento esponenziale sono:

- Gli attrattori di sistemi uniformemente iperbolici, rispetto all’unica misura SRB ergodica che possiedono.
- Mappe lisce che espandono lo spazio in maniera uniforme, ovvero  $f \in C^2$  definita su una varietà  $M$  compatta e Riemanniana per la quale esistono  $C > 0$  e  $\lambda > 0$  tali che  $\|Df^n v\| \geq C \lambda^n$  per ogni  $v \in TM$ . Per tali mappe si dimostra l’esistenza di un’unica misura invariante ergodica assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.
- Gli attrattori strani descritti dalla teoria di Wang e Young, che comprendono ad esempio la mappa di Hénon per un insieme dei parametri di misura positiva.

Alcuni di questi risultati si estendono, ad esempio, a mappe lisce a tratti uniformemente espansive o a sistemi parzialmente iperbolici dotati di misura assolutamente continua rispetto a Lebesgue.

Tra i sistemi più interessanti che presentano un decadimento delle correlazioni polinomiale ci sono alcuni sistemi detti intermittenti o parabolici o quasi iperbolici. Essi sono caratterizzati, ad esempio, dalla presenza di un punto fisso indifferente. Le orbite di questi sistemi tendono a passare un lungo tempo in un intorno del punto fisso con degli scoppi di attività caotica di durata relativamente breve che si concludono quando il sistema viene di nuovo intrappolato vicino al punto fisso, dando luogo al fenomeno detto di *intermittenza*<sup>38</sup>. L'esempio più semplice e studiato è quello di una mappa  $f$  sull'intervallo  $[0, 1]$  che sia uniformemente espansiva in tutto l'intervallo tranne che in un punto fisso (che assumiamo sia l'origine) indifferente, ovvero  $f'(0) = 1$ , di modo che in un intorno di 0 si abbia che

$$f(x) \approx x + x^2 \phi(x),$$

dove  $\approx$  significa che i due membri convergono per  $x \rightarrow 0$  insieme alle loro prime due derivate. Questo esempio è interessante anche perché se  $f$  è  $C^2$  nel punto fisso, allora ammette una misura invariante con misura infinita, la quale assegnerà misura infinita ad ogni intorno dell'origine e misura finita ai loro complementari. Viceversa se si ammette che la derivata seconda vada all'infinito in zero (ovvero la derivata prima si allontana velocemente da 1 mentre ci si allontana dal punto fisso) il sistema ammette una misura di probabilità invariante (ed assolutamente continua) con diversi tipi di velocità di decadimento possibile. In particolare per  $\phi(x) = x^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  si ha  $C_n = O(n^{1-\frac{1}{\alpha}})$ .

Un altro esempio di sistema con decadimento polinomiale è costruito in [Fay01] tramite la riparametrizzazione di un flusso lineare sul toro con una condizione Diofantea sull'angolo di rotazione.

Non abbiamo fatto nessun accenno ai metodi che si utilizzano per ottenere i risultati di decadimento per i quali rimandiamo a [Bal00], [Vsdds], [Liv95], [You98b] e [You99b].

---

<sup>38</sup>Fenomeno caratteristico della teoria delle *Self-organized criticalities*, vedi [PerBak] e [Je98].

## Capitolo 3

# Teoria ergodica: concetti di base

La teoria ergodica studia le trasformazioni che conservano una misura. Il concetto di misura viene usato nelle applicazioni sia per misurare quantità spaziali come lunghezze, aree, volumi e quantità fisiche spazialmente distribuite come massa, energia o densità di un campo, sia come misura di probabilità a cui è implicitamente associata una interpretazione epistemologica. Gli esempi che abbiamo visto nella sezione precedente appartengono a questa seconda ambientazione, dove la probabilità è interpretata dinamicamente come frequenza di un evento<sup>1</sup>, ed allo stesso modo la teoria ergodica può essere considerata come una estensione della probabilità in un contesto dinamico: essa studia il comportamento medio asintotico dei sistemi.

Abbiamo visto trasformazioni che conservano una misura naturale studiate nei sistemi dinamici, che includono oltre ai sistemi hamiltoniani<sup>2</sup> ed a quelli iperbolici (uniformi o non) anche sistemi simbolici come shift di Bernoulli, shift di Markov ed eventuali sottoshift (ovvero restrizione di uno shift completo ad un sottoinsieme invariante dello spazio delle successioni); si possono trovare ulteriori informazioni in [PoYu04], [KaHa95] e [You95]. La teoria ergodica si applica anche ad altri sistemi che possono essere di interesse in probabilità (processi stocastici stazionari), geometria (flussi su varietà a curvatura negativa) o teoria dei numeri (teorema di Szemerédi e ricorrenza multipla). Inoltre dal punto di vista matematico è molto importante la classificazione dei sistemi che conservano una misura, che si avvale di strumenti propri dell'analisi funzionale (invarianti spettrali) e di altre costruzioni più

---

<sup>1</sup>Questo segue dal teorema di Birkhoff.

<sup>2</sup>Tra questi non ancora menzionato ma storicamente importante per la connessione con la meccanica statistica è il sistema costituito da sfere dure che collidono elasticamente in un contenitore ed i vari tipi di biliardi ad esso associato.

combinatorie (entropia e teorema di isomorfismo di Ornstein). Riferimenti generali per la teoria ergodica che includono i vari argomenti menzionati sopra sono: [Pet83], [Pa81], [Wa83], [Si76], [Bil65], [BKS91], [Sh96], [Fu81].

Quanto segue è invece la presentazione minimale dei risultati di teoria ergodica necessari al nostro lavoro: oltre ai più volte citati teoremi di Poincaré, Kac e Birkhoff dimostriamo un teorema di Haydn. Lacroix e Vaienti sulla relazione tra leggi statistiche per i tempi di ritorno ed i tempi d'attesa. Iniziamo con una definizione che caratterizza il nostro tipo di approccio alla teoria ergodica:

**Definizione 3.0.1.**<sup>3</sup> Preso  $A \subset X$  sia  $\tau_A : X \rightarrow \mathbb{N}^+ \cup \infty$  la funzione detta tempo d'attesa (affinché il punto  $x$  raggiunga l'insieme  $A$ ) definita da:

$$\tau_A(x) := \min\{n > 0 \mid T^n x \in A\}$$

con la convenzione per cui il minimo di un insieme vuoto è  $\infty$ . Per  $x \in A$  questo è anche detto tempo di ricorrenza di  $x$  in  $A$ .

### 3.1 Teorema di Poincaré

Il classico Teorema di ricorrenza di Poincaré è considerato il primo risultato della teoria ergodica; di seguito ne viene data una formulazione moderna:

**Teorema 3.1.** *Se  $T : X \rightarrow X$  è un sistema dinamico la cui evoluzione conserva una misura di probabilità invariante  $\mu$ , allora quasi ogni punto di un insieme di misura positivo  $A$  ricorre infinite volte nell'insieme, ovvero:*

$$\mu(\{x \in A \mid T^n x \in A \text{ per infiniti } n \text{ positivi}\}) = \mu(A)$$

**Dimostrazione.** Fisso  $k$  positivo o nullo<sup>4</sup> e sia

$$F_k = \{x \in A \mid x \text{ ricorre in } A \text{ esattamente } k \text{ volte}\};$$

la tesi segue da  $\mu(F_k) = 0$ .

---

<sup>3</sup>Lavoriamo in un sistema dinamico fissato  $T : X \rightarrow X$ , per cui non abbiamo bisogno di evidenziare la dipendenza dalla dinamica  $T$ .

<sup>4</sup>Spesso si dimostra la versione più 'debole' del Teorema: quasi ogni punto di un insieme di misura positiva ricorre almeno una volta (il nostro caso  $k = 0$ ). Da questo segue con un argomento aggiuntivo (sovente omesso) anche la versione 'forte' del teorema (quello che noi dimostriamo con una piccola perturbazione della dimostrazione 'debole'): applico il teorema 'debole' a  $T^n A$  (posso perché  $\mu(T^n A) = \mu(T^{-n} T^n A) \geq \mu(A)$ ) e considero i punti di  $T^n A$  che non ricorrono; sono un insieme di misura nulla così come la loro controimmagine la quale contiene i punti di  $A$  che smettono di ricorrere dopo  $n$  iterate. L'argomento si conclude osservando l'arbitrarietà di  $n$ .

Noto che  $F_k \cap T^{-n}F_k = \emptyset$  per  $n > 0$  infatti se  $x \in T^{-n}F_k$  e  $x \in A$  allora  $x \in F_{k+1}$  che è disgiunto da  $F_k$ . Applicando le controimmagini segue che  $T^{-m}F_k \cap T^{-n}F_k = \emptyset$  per  $n > m > 0$ , ovvero gli insiemi della successione (per  $n \geq 0$ ) degli  $T^{-n}F_k$  sono a due a due disgiunti; l'invarianza della misura implica che hanno tutti la stessa misura e la finitezza della misura impone che questa sia nulla.  $\square$

Il fatto che nel teorema di Poincarè non sia menzionata alcun tipo di ergodicità non deve stupire in quanto la nozione di sistema ergodico è in un certo senso implicita nella nozione di sistema che conserva una misura, in modo analogo a come la nozione di connessione e componente connessa scaturiscono naturalmente dal concetto di topologia.

## 3.2 Sistemi ergodici

Un sistema ergodico è una parte indecomponibile di un sistema dinamico che conserva una misura, come esprime in modo succinto la definizione standard: un sistema in cui gli insiemi invarianti hanno misura banale (zero o uno). Più precisamente come conseguenza del teorema di Krein-Milman (l'insieme delle misure invarianti per una trasformazione è un convesso) e del teorema di rappresentazione di Choquet (vedi [Pet83]) si ha il seguente:

**Teorema 3.2.** *Preso un sistema dinamico  $(X, T)$ , ad ogni misura  $\mu$  conservata dalla trasformazione corrisponde una misura di probabilità boreliana  $M_\mu$  sull'insieme delle misure invarianti ed ergodiche per il sistema tale che*

$$\mu = \int \nu dM_\mu(\nu),$$

ovvero  $\int \phi d\mu = \int (\int \phi d\nu) dM_\mu(\nu)$  per ogni  $\phi \in C(X)$ .

Nell'introduzione abbiamo invece definito un sistema ergodico quello per cui ogni sottoinsieme di misura positiva dello spazio delle fasi è raggiunto in un tempo finito dalle orbite che partono da quasi ogni punto<sup>5</sup>; le due definizioni si riconciliano nella prossima proposizione, insieme ad un'altra utile caratterizzazione<sup>6</sup>:

<sup>5</sup>Vedi le note dell'introduzione per maggiori informazioni sulle vicissitudini del termine ergodico. La nostra definizione, che non si trova altrimenti in letteratura, è stata proposta in parte perché i tempi d'attesa sono stati scelti come filo conduttore della tesi, in parte perché essa ci pare richiamare più da vicino le intenzioni originali di Boltzmann.

<sup>6</sup>Altre definizioni equivalenti saranno date nel seguito.

**Proposizione 3.2.1.** *Per un sistema che conserva una misura di probabilità sono condizioni equivalenti:*

1. Per ogni  $A$  con  $\mu(A) > 0$  ho che  $\tau_A(x) < +\infty$  per quasi ogni  $x \in X$ ;
2. Ogni  $A$  insieme invariante ( $T^{-1}A = A$ ) ha misura 0 o 1;
3. Ogni funzione  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}(:= \mathbb{R} \cup \{\infty\})$  invariante ( $f(x) = f(Tx)$ ) è costante quasi ovunque;

**Dimostrazione.** (1  $\Rightarrow$  2) I punti di un insieme invariante sono tutti e soli i punti che hanno un tempo d'attesa finito per entrarvi, quindi o l'insieme od il suo complementare hanno misura nulla.

(2  $\Rightarrow$  3) Gli insiemi  $\{x \in X \mid f(x) = c\}$  sono disgiunti ed invarianti per ogni  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ . Poichè coprono tutto  $X$  uno e solo uno avrà misura piena.

(3  $\Rightarrow$  1) Considero la funzione caratteristica dei numeri reali finiti  $\chi_{\mathbb{R}}$  sulla retta reale estesa  $\overline{\mathbb{R}}$ . La composizione  $\chi_{\mathbb{R}} \circ \tau_A$  è invariante, dunque il tempo d'attesa per entrare in  $A$  è finito quasi ovunque se e solo se  $\mu(A) > 0$ .  $\square$

*Osservazione 3.2.1.* Posso indebolire il punto 3 richiedendo oltre all'invarianza anche che  $f \in L^p$  con  $0 < p < \infty$  e la condizione rimane equivalente all'ergodicità. Infatti le funzioni caratteristiche stanno in tutti gli  $L^p$  e da questo segue il punto 2. Il punto 3 così indebolito può essere comodo per dimostrare l'ergodicità di un sistema.

*Osservazione 3.2.2.* Il punto 1 ammette una formulazione 'reciproca' che è anch'essa equivalente all'ergodicità: fissato  $A$  di misura positiva quasi ogni punto di  $X$  è raggiunto in un tempo finito da qualche punto di  $A^7$ . Questa osservazione sarà usata tra poco nella dimostrazione del Teorema di Kac.

### 3.3 Teorema di Kac

Il teorema di Kac è l'ingrediente fondamentale nella prossima sezione per definire le leggi statistiche asintotiche di ricorrenza e tempi d'attesa e mostrare il loro carattere 'duale'.

**Teorema 3.3.** *Sia  $T : X \rightarrow X$  una trasformazione ergodica che conserva una misura  $\mu$  e sia  $A$  un insieme misurabile con  $\mu(A) > 0$ . Allora si ha che:*

$$\mathbf{E}_A[\tau_A] = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \tau_A d\mu = \frac{1}{\mu(A)}$$

---

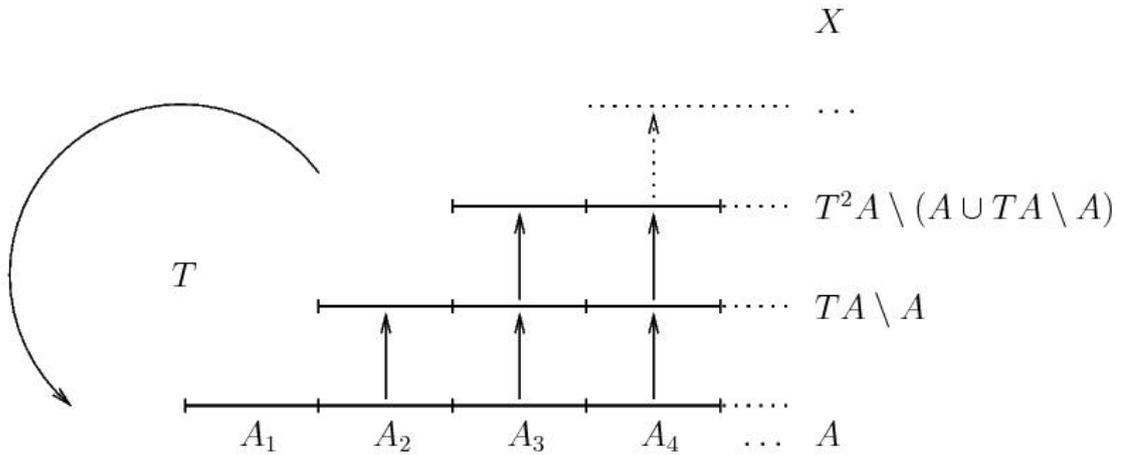
<sup>7</sup>Infatti i punti di  $X$  che non sono mai raggiunti sono un insieme invariante ed il complementare contiene  $T^{-1}A$  che ha misura positiva. Viceversa poichè da un insieme di misura positiva posso raggiungere quasi ogni punto di  $X$  se esso è anche invariante (dunque contiene tutti i punti che tocca con la dinamica) avrà forzatamente misura piena.

**Dimostrazione.** Partiziono  $A$  negli insiemi su cui  $\tau_A$  è costante, ovvero  $A_n = \{x \in A \mid \tau_A(x) = n\}$ . Poichè il sistema è ergodico quasi ogni punto di  $X$  è raggiunto in un tempo finito da qualche punto di  $A$ , dunque gli insiemi

$$A, TA \setminus A, T^2A \setminus (A \cup TA), \dots$$

costituiscono una partizione di  $X$ , a meno di insiemi di misura nulla.

Se porto in giro con la dinamica la partizione di  $A$  raffinando la partizione di  $X$  ottengo un diagramma (vedi figura 3.1), detto grattacielo di Kakutani in cui  $T$  agisce spostando verticalmente gli appartamenti dei piani bassi ai piani alti e ritornando al pianterreno quando incontra il tetto.



**Figura 3.1:** Il grattacielo di Kakutani.

La partizione raffinata è costituita dagli insiemi  $T^i A_n$  per  $n > 0, i = 0, 1, \dots, n - 1$  e siccome l'invarianza della misura garantisce che  $\mu(T^i A_n)$  è costante al variare di  $i$ , ovvero  $\mu(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^i A_n) = n\mu(A_n)$  si deduce la tesi calcolando l'integrale:

$$\int_A \tau_A d\mu = \sum_n n\mu(A_n) = 1$$

□

*Osservazione 3.3.1.* In generale se  $T$  conserva una misura (non necessariamente ergodica) con la stessa dimostrazione si ha che

$$\int_A \tau_A d\mu \leq 1.$$

La dimostrazione qui proposta è di [Wr61], mentre la dimostrazione originale di si trova in [Kac47]; entrambe si trovano in [Pet83].

### 3.4 Leggi statistiche asintotiche di ritorno e di attesa

Il teorema di Kac fornisce il valore atteso per il tempo di ritorno dei punti di un insieme di misura positiva; in questa sezione vogliamo studiare la legge statistica asintotica dei tempi di ritorno e di attesa in insiemi sempre più piccoli. In particolare studieremo le distribuzioni limite per successioni di insiemi le cui misure vanno a zero. Tipicamente la legge che si ottiene nei sistemi mescolanti è la legge esponenziale, sia nel caso dei tempi di ritorni che in quelli di attesa, mentre in altri sistemi ergodici (per esempio le rotazioni su di una circonferenza) sono note leggi diverse.

Una delle motivazioni per lo studio delle leggi statistiche è che tramite di esse è possibile ottenere risultati sull'uguaglianza tra indicatori e dimensione, come in [BaSa01] e [Ga05] (vedi sezione 5.2); inoltre sono spesso usate per determinare la velocità di decadimento delle correlazioni e il teorema del limite centrale (vedi [HSV 99] e riferimenti nella sezione 2.3). In questa sezione siamo interessati ad un teorema dimostrato in [HLV05] che suggerisce un legame 'duale' tra ricorrenza e tempi d'attesa.

Sia  $A \subset X$  misurabile con  $\mu(A) > 0$  e definiamo

$$\begin{aligned}\tilde{F}_A(t) &= \frac{1}{\mu(A)} \mu(A \cap \{\tau_A \mu(A) \leq t\}), \\ F_A(t) &= \mu\{\mu(A) \tau_A \leq t\}.\end{aligned}$$

Dove la prima rappresenta la distribuzione del tempo di ritorno in  $A$  e la seconda la distribuzione dei tempi di attesa; le normalizzazioni sono suggerite dal teorema di Kac. Siamo interessati al limite di queste distribuzioni per una successione  $A_n \subset X$  con  $\mu(A_n) \rightarrow 0$ . La funzione limite non sarà in generale una distribuzione di probabilità, bensì una sottodistribuzione.

**Definizione 3.4.1.** Diremo che una successione di distribuzioni  $F_n$  converge debolmente ad una funzione  $F$ , se  $F$  è non decrescente, continua a destra e in ogni punto  $t$  di continuità per  $F$  si ha che  $\lim_n F_n(t) = F(t)$ . Denoteremo la convergenza con  $F_n \Rightarrow F$ .

Citiamo un risultato classico di convergenza alla legge statistica esponenziale ([Hi93]), mentre rimandiamo per ulteriori risultati agli articoli [Coe00], [AbGa01], [HSV 99] e [BSTV03].

**Teorema 3.4.** *Sia  $(X, T, \mu)$  un sistema ergodico uniformemente iperbolico e siano  $A_n = B(x, r_n)$  le palle di centro fissato e raggio  $r_n \rightarrow 0$ . Per quasi ogni  $x \in X$  si ha che per ogni  $t \geq 0$ :*

$$F_{A_n}(t) \rightarrow 1 - e^{-t}.$$

Il teorema principale della sezione è il seguente:

**Teorema 3.5.** *Se  $(X, T, \mu)$  un sistema ergodico e  $A_n \subset X$  una successione di insiemi misurabili di misura positiva, allora la successione di funzioni  $\tilde{F}_{A_n}$  converge debolmente se e solo se  $F_{A_n}$  converge debolmente.*

*Inoltre se si ha la convergenza, le sotto-distribuzioni limite  $\tilde{F}$  e  $F$  verificano per  $t \geq 0$ :*

$$F(t) = \int_0^t (1 - \tilde{F}(s)) ds \quad (3.1)$$

*Osservazione 3.4.1.* In particolare si ottiene che la distribuzione esponenziale è l'unica distribuzione che può essere il limite sia dei tempi di ritorno che dei tempi di attesa, essendo l'unico punto fisso di (3.1).

**Dimostrazione.** Mostriamo che la convergenza della distribuzione dei tempi di ritorno implica la convergenza della distribuzione per i tempi di attesa e vale (3.1). Per l'altra implicazione del teorema, che si dimostra in maniera analoga, rimandiamo a [HLV05].

Per  $k \geq 1$  considero, come nella dimostrazione del teorema di Kac, gli insiemi  $A_k = \{x \in A \mid \tau_A(x) = k\}$ , di modo che  $X$  sia una partizione di  $\bigcup_{i=0}^{k-1} T^i A_k$ .

Introduciamo anche gli insiemi  $B_k = \{x \in X \mid \tau_B(x) = k\}$  per i quali si ha che  $B_k = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^i A_{k+i}$  e  $\mu(B_k) = \sum_{i \geq k} \mu(A_i)$ .

Per  $t \geq 0$  noto che

$$F_A(t) = \mu\left\{\tau_A \leq \frac{t}{\mu(A)}\right\} = \sum_{k \leq t/\mu(A)} \mu(B_k),$$

dunque  $F_A$  è costante sugli intervalli  $[k\mu(A), (k+1)\mu(A)[$ , con un salto di altezza  $\mu(B_k)$  in  $k\mu(A)$ .

Definisco  $\overline{F}_A$  la funzione lineare a pezzi e continua che coincide con  $F_A$  nei suoi punti di discontinuità. Essa è non decrescente e, poiché i salti di  $F_A$  decrescono, è concava. Inoltre la derivata destra soddisfa per  $\text{tin}[k\mu(A), (k+1)\mu(A)[$ :

$$\overline{F}_A^+(t) = \frac{\mu(B_{k+1})}{\mu(A)}.$$

Considero ora

$$\tilde{F}_A(t) = \frac{1}{\mu(A)} \mu\left(A \cap \left\{\tau_A \leq \frac{t}{\mu(A)}\right\}\right) = \frac{1}{\mu(A)} \sum_{k \leq t/\mu(A)} \mu(A_k),$$

la quale è dunque costante su  $[k\mu(A), (k+1)\mu(A)[$  con salti di altezza  $\frac{\mu(A_k)}{\mu(A)}$  in  $k\mu(A)$ .

Mettendo insieme quanto sopra ho che

$$\overline{F}_A^+(t) = 1 - \tilde{F}_A(t) \text{ per } t \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\|F_A - \overline{F}_A\|_\infty \leq \mu(A). \quad (3.3)$$

Ora suppongo che  $A_n \subset X$  (da non confondere con i precedenti  $A_k$  che hanno esaurito la loro funzione) siano tali che  $\mu(A_n) \rightarrow 0$  e  $\tilde{F}_{A_n} \Rightarrow \tilde{F}$ . Poiché  $\tilde{F}$  è non decrescente, si ha che  $\tilde{F}_{A_n} \rightarrow \tilde{F}$  per Lebesgue quasi ogni  $t \in [0, +\infty[$ . Per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue si ha che, grazie a (3.2), per  $t \geq 0$

$$\overline{F}_{A_n}(t) = \int_0^t (1 - \tilde{F}_{A_n}(s)) ds \rightarrow \int_0^t (1 - \tilde{F}(s)) ds =: F(t)$$

e pongo  $F(t) = 0$  per  $t < 0$ .

Grazie a (3.3) si ha che  $F_{A_n}(t) \rightarrow F(t)$  per ogni  $t$  e la tesi segue.  $\square$

Curiosamente questo risultato fu mostrato solo dopo i risultati tecnicamente più impegnativi di [La02] e [KuLa05], i quali assicurano che è possibile ottenere una qualsiasi (o quasi) legge statistica asintotica se si ha il permesso di scegliere la successione di insiemi misurabili le cui misure vanno a zero. Le leggi statistiche asintotiche che si possono ottenere sono individuate dalle seguenti classi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \mid F \text{ non decrescente, continua e concava su } [0, +\infty[, \\ &\quad F \equiv 0 \text{ su } ]-\infty, 0], F(t) \leq t \text{ per } t \geq 0\}; \\ \tilde{\mathcal{F}} &= \{\tilde{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \mid \tilde{F} \text{ non decrescente e continua a destra,} \\ &\quad \tilde{F} \equiv 0 \text{ su } ]-\infty, 0], \int_0^{+\infty} (1 - \tilde{F}(s)) ds \leq 1\}; \end{aligned}$$

ed i risultati di [La02] e [KuLa05] si possono riassumere nel seguente:

**Teorema 3.6.** *Se  $(X, T, \mu)$  un sistema dinamico ergodico aperiodico allora si ha che*

- (a) per ogni  $F \in \mathcal{F}$  esiste una successione  $A_n \subset X$  tali che  $\mu(A_n) \rightarrow 0$  e  $F_{A_n} \Rightarrow F$ ; viceversa ogni tale funzione limite sta in  $\mathcal{F}$ .
- (b) per ogni  $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$  esiste una successione  $A_n \subset X$  tali che  $\mu(A_n) \rightarrow 0$  e  $\tilde{F}_{A_n} \Rightarrow \tilde{F}$ ; viceversa ogni tale funzione limite sta in  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Un ultima nota divertente riguarda uno sviluppo recente degli studi sulle leggi statistiche che ha portato Downarowicz e Lacroix a formulare un teorema generale che può essere interpretato come una spiegazione del fenomeno di occorrenza ravvicinata di eventi altamente improbabili noto nella letteratura anglosassone come *law of series*. Diamo un esempio di questo fenomeno che ha affascinato diverse persone<sup>8</sup> e ha portato a diverse teorie pseudoscientifiche che cercassero di giustificarlo, rimandando all'articolo originale ed al sito di Donarowicz<sup>9</sup> per ulteriori spiegazioni:

“Nel 1891 l'inglese Charles Wells, in una sola notte, fece saltare per ben tre volte il banco di 100 000 franchi della roulette di uno dei casinò di Monte Carlo. Dopo aver vinto per la terza volta si ritirò dal gioco con i soldi e non fu più visto a Monte Carlo. Non c'è bisogno di osservare che far saltare il banco è un evento altamente improbabile.”

### 3.5 Teorema di Birkhoff

Dopo aver appreso che von Neumann aveva mostrato che in un sistema dinamico che conserva una misura le medie temporali di un osservabile convergono in media  $L^2$  ad una qualche funzione limite (Teorema Ergodico Medio), il giovane G. D. Birkhoff si procura un forte mal di testa riuscendo però a dimostrare il più difficile Teorema Ergodico Puntuale, detta anche solamente Teorema Ergodico per la sua fondamentale importanza nell'ambito della teoria ergodica.

**Teorema 3.7.** *Se  $T : X \rightarrow X$  è una trasformazione che conserva una misura di probabilità  $\mu$  allora preso un osservabile  $\phi \in L^1(\mu)$  si ha che esiste  $\bar{\phi} \in L^1(\mu)$  tale che*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x) \rightarrow \bar{\phi}(x) \quad \text{per } \mu\text{-quasi ogni } x.$$

<sup>8</sup>Tra cui anche il fisico Pauli e lo psicanalista Jung, i quali credevano in una teoria della sincronicità secondo la quale eventi simili tendono ad attrarsi nello spazio e nel tempo.

<sup>9</sup>L'articolo è [DoLa00]; il sito da cui è tratto l'esempio è [http://www.im.pwr.wroc.pl/downar/english/documents/law\\_of\\_series.html](http://www.im.pwr.wroc.pl/downar/english/documents/law_of_series.html).

Inoltre  $\bar{\phi}$  è quasi ovunque invariante e  $\int \bar{\phi} d\mu = \int \phi d\mu$ .

Mettendo insieme il teorema con la terza definizione di sistema ergodico data nella proposizione 3.2.1 si ha la seguente versione del teorema di Birkhoff, la cui tesi è equivalente all'ergodicità.

**Teorema 3.8.** *In un sistema ergodico preso un osservabile  $\phi \in L^1(\mu)$ , per quasi ogni punto si ha:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ T^i(x) \rightarrow \int \phi d\mu \quad (3.4)$$

Applicando il teorema alle funzioni caratteristiche si ottiene:

**Corollario 3.9.** *In un sistema ergodico preso  $A \subset X$  per quasi ogni  $x$*

$$\frac{\text{Card}\{1 \leq i \leq n \mid T^i x \in A\}}{n} \rightarrow \mu(A).$$

La difficile dimostrazione originale di [Bir31] si è moltiplicata in diverse varianti e recentemente [KePe06] le hanno fatte convergere in quella che probabilmente è la dimostrazione più semplice e breve.

L'importanza di questo teorema, che è uno dei risultati più generali ed utili della teoria dei sistemi dinamici, è enorme e può essere valutata dal numero di volte in cui abbiamo avuto già occasione di citarlo. Rivediamo quanto detto in una serie di osservazioni:

*Osservazione 3.5.1.* (p. 5) Il corollario 3.9 risponde al primo quesito sulla ricorrenza quantitativa: la frequenza con cui un punto ritorna in un intorno di sé stesso è (in un sistema ergodico) pari alla misura dell'intorno.

*Osservazione 3.5.2.* (p. 10) Il Teorema di Birkhoff è solitamente parafrasato nella letteratura fisica come 'uguaglianza tra media temporale e media spaziale' ma questa affermazione va presa *cum grano salis* perchè un sistema solitamente ha molte misure invarianti e la media spaziale dipende dalla misura mentre quella temporale no; d'altra parte il teorema è vero per  $\mu$ -quasi ogni punto e due misure invarianti differenti saranno solitamente singolari l'una rispetto all'altra.

*Osservazione 3.5.3.* (p. 24) Il concetto di misura fisica è quello che permette di giustificare l'affermazione della precedente osservazione ed i teoremi sull'esistenza di misure SRB in particolari sistemi possono essere considerati come estensioni del teorema di Birkhoff.

*Osservazione 3.5.4.* (p. 25) Quella che solitamente è considerata l'estensione multidimensionale e non commutativa del teorema di Birkhoff è il teorema di Oseledec o Teorema ergodico moltiplicativo che fa per gli osservabili matriciali quello che il teorema ergodico fa per gli scalari.

*Osservazione 3.5.5.* (p. 28) Abbiamo notato che lo stesso teorema di Birkhoff può essere considerato una estensione dinamica della legge dei grandi numeri in probabilità, aprendo così le porte ad una serie di domande su quali leggi probabilistiche si possano estendere e generalizzare al caso dinamico, passando da condizioni di indipendenza ad una asintotico decadimento delle correlazioni.

*Osservazione 3.5.6.* (p. 31) Infine l'approccio frequentista alla probabilità naturale nello studio dei sistemi dinamici che conservano una misura è giustificato dal corollario del teorema.

Moltissime sono le applicazioni del teorema e notevole anche solo l'affermazione dell'esistenza del limite. Lasciamo la parola a [Bir42] che fornendo sull'*American Mathematical Monthly* spiegazioni ed applicazioni elementari del teorema ergodico conclude con un esempio caratteristico dell'affetto, ereditato da Poincaré, che portava per la meccanica celeste:

“Quindi nella celebre idealizzazione di G.W. Hill del sistema terra-sole-luna (problema ristretto dei tre corpi) possiamo immediatamente affermare (con probabilità 1) che la luna possiede un vero stato angolare medio di rotazione attorno alla terra, lo stesso in entrambe le direzioni del tempo.”

## 3.6 Mescolamento

Dal Teorema di Birkhoff segue che un sistema ergodico è mescolante in media, anzi si ha:

**Proposizione 3.6.1.** *Un sistema è ergodico se e solo se*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) \rightarrow \mu(A) \mu(B). \quad (3.5)$$

**Dimostrazione.** La sufficienza della condizione si verifica prendendo  $A = B$  invariante in 3.5 e constatando che le soluzioni possibili dell'equazione risultante sono  $\mu(A) = 0, 1$ .

La necessità si mostra integrando su  $B$  l'equazione 3.4 con  $\phi = \chi_A$  e notando che  $\int_B \chi_A \circ T^i(x) d\mu = \mu(T^{-i}A \cap B)$ .  $\square$

Da questa proposizione segue immediatamente che la seguente proprietà implica l'ergodicità (e vedremo nella sezione 5.1 che essa è strettamente più forte):

**Definizione 3.6.1.** Un sistema  $T : X \curvearrowright$  che conserva una misura  $\mu$  si dice *mescolante* se per ogni  $A, B \subset X$  misurabili

$$\mu(T^{-n}A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B). \quad (3.6)$$

In probabilità due insiemi si dicono indipendenti se la misura dell'intersezione è il prodotto delle misure. Dunque un sistema è mescolante se asintoticamente gli insiemi tendono a diventare indipendenti tramite la dinamica<sup>10</sup>.

La condizione 3.6 può essere espressa in maniera integrale:

$$\int \chi_B(\chi_A \circ T^n) d\mu - \int \chi_A d\mu \int \chi_B d\mu \rightarrow 0$$

Che non è altro che  $\mathcal{C}_n(\chi_A, \chi_B) \rightarrow 0$  (vedi (2.2)), ovvero il decadimento delle correlazioni. Dunque il mescolamento è equivalente al decadimento delle correlazioni nello spazio  $\mathcal{F}$  delle funzioni misurabili.

È un fatto noto che il decadimento di due funzioni caratteristiche può essere reso arbitrariamente lento, per questo nella sezione sul decadimento delle correlazioni abbiamo assunto una maggiore regolarità (condizione di Hölder) sugli osservabili. Sfortunatamente le funzioni caratteristiche non sono nemmeno continue, dunque per poter utilizzare i risultati sul decadimento delle correlazioni (2.3) avremo bisogno di un lemma di raccordo.

---

<sup>10</sup>La condizione naturale ed equivalente a 3.6 è  $\mu(T^{-n}A \cap T^{-m}B) \rightarrow \mu(T^{-n}A)\mu(T^{-m}B) = \mu(A)\mu(B)$  per  $|n - m| \rightarrow \infty$ .

# Capitolo 4

## Disuguaglianze tra indicatori e dimensione

Il nostro contesto assiomatico è definito da un sistema dinamico discreto  $(X, T)$  dove  $X$  è uno spazio metrico separabile dotato di misura Boreliana localmente finita e  $T : X \rightarrow X$  è una mappa misurabile che conserva la misura. Dalla sezione 4.3 in poi richiederemo che la misura sia di probabilità:  $\mu(X) = 1$ . I primi risultati, inclusi il fatto che l'indicatore di tempo d'attesa è un limite superiore alla dimensione locale, non richiedono la finitezza della misura. L'ipotesi che il sistema sia ergodico non è necessaria per mostrare le disuguaglianze.

### 4.1 Definizioni e notazioni preliminari

Ricordo che (vedi sezione 3):

$$\tau_A(x) := \min\{n > 0 \mid T^n x \in A\}$$

**Definizione 4.1.1.** Definiamo gli *indicatori superiore ed inferiore di tempo d'attesa* affinché  $y$  raggiunga  $x$ :

$$\begin{aligned}\overline{R}(y, x) &:= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_{B_r(x)}(y))}{\log 1/r}, \\ \underline{R}(y, x) &:= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_{B_r(x)}(y))}{\log 1/r};\end{aligned}$$

diremo  $\overline{R}(x) := \overline{R}(x, x)$  e  $\underline{R}(x) := \underline{R}(x, x)$  gli *indicatori superiore ed inferiore di ricorrenza* di  $x$ .

Le seguenti proposizioni seguono direttamente dalle definizioni e le enunceremo solo per  $\overline{R}$  in quanto la dimostrazione per  $\underline{R}$  è identica.

**Proposizione 4.1.1.** *Ogni successione  $r_n \searrow 0$  per cui definitivamente  $r_{n+1} > cr_n$  per una costante  $c < 1$ , conserva il  $\limsup$ :*

$$\overline{R}(y, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\tau_{B_{r_n}(x)}(y))}{-\log r_n}$$

**Dimostrazione.** Se  $r_n \geq r \geq r_{n+1} \geq cr_n$  allora  $\tau_{r_{n+1}} \geq \tau_r \geq \tau_{r_n}$ ; inoltre  $\log r_n \geq \log r \geq \log r_{n+1} \geq \log cr_n \geq \log cr \geq \dots$ . Quindi definitivamente:

$$\frac{\log \tau_{r_{n+1}}}{-\log r_{n+1}} \geq \frac{\log \tau_r}{-\log r - \log c} \geq \frac{\log \tau_{r_n}}{-\log r_n - 2 \log c},$$

e la tesi segue prendendo il limite superiore.  $\square$

Indichiamo con  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  la metrica di  $X$ . Una mappa  $T : X \rightarrow X$  è  $\alpha$ -Hölderiana se  $\text{dist}(Tx, Ty) \leq c \text{dist}(x, y)^\alpha$  per ogni  $x, y \in X$ . Una mappa 1-Hölderiana è detta Lipschitz. Una mappa bi-Lipschitz, cioè Lipschitz con inversa Lipschitz, manda una metrica in una metrica equivalente ovvero è un isomorfismo di spazi metrici.

**Proposizione 4.1.2.**  $\overline{R}(y, x)$  soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\overline{R}(y, x) = \overline{R}(Ty, x)$ ;
2. Se  $T$  è Lipschitz allora  $\overline{R}(y, x) \geq \overline{R}(y, Tx)$ ;
3. Se  $T$  è  $\alpha$ -Hölderiana allora  $\overline{R}(y, x) \geq \alpha \overline{R}(y, Tx)$ .

**Dimostrazione.** 1. La funzione monotona (in  $r$ )  $\tau_{B_r(x)}(y)$  è illimitata per  $r \rightarrow 0$  se e solo se lo è  $\tau_{B_r(x)}(Ty)$  poiché in tal caso le due funzioni differiscono di una costante (uno) che non modifica il limite; dunque se una delle due è limitata lo è anche l'altra ed in questo caso il  $\limsup$  è nullo per entrambe.  
 2. È un caso particolare del punto successivo con  $\alpha = 1$ .  
 3.  $\text{dist}(T T^n y, Tx) \leq c \text{dist}(T^n y, x)^\alpha$  implica  $\tau_{B_{c r^\alpha}(Tx)}(y) \leq \tau_{B_r(x)}(y)$  da cui la tesi.

$\square$

*Osservazione 4.1.1.* I punti 1 e 2 insieme alla condizione 3 della proposizione 3.2.1 implicano che in un sistema ergodico l'indicatore di tempo d'attesa è quasi ovunque costante (fissato  $x$ ); l'indicatore di ricorrenza è quasi ovunque costante se assumo in più che  $T$  sia Lipschitz.

Infine passiamo alla definizione di dimensione locale, vedi anche l'appendice B.

**Definizione 4.1.2.** In uno spazio metrico  $X$  con una misura  $\mu$  si definiscono per ogni punto  $x$  la *dimensione locale superiore ed inferiore* nel punto:

$$\begin{aligned}\bar{d}_\mu(x) &:= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r}, \\ \underline{d}_\mu(x) &:= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r}.\end{aligned}$$

*Osservazione 4.1.2.* Anche per le dimensioni locali vale il risultato della proposizione 4.1.1. Quindi per mostrare una disuguaglianza tra gli indicatori possiamo ridurci a considerare successioni di palle con raggi decrescenti in modo al più geometrico.

I  $\limsup$  e  $\liminf$  verranno considerati definiti rispetto ad una determinata successione  $r_n$  che comunque diminuirà in maniera al più geometrica, permettendo alla proposizione 4.1.1 di rassicurarci: i limiti superiori ed inferiori si conserveranno per la data successione.. Fissato  $x$ , denoteremo i tempi d'attesa nelle palle della successione così:  $\tau_{r_n} := \tau_{B_{r_n}(x)}$ .

Useremo talvolta la notazione probabilistica per cui data una proprietà  $P(x)$  che definisce estensionalmente un sottoinsieme di  $X$  si sottointende il punto e la sua appartenenza allo spazio ambiente  $\mu\{P\} := \mu(\{x \in X \mid P(x)\})$ .

## 4.2 Tempi d'attesa come limite superiore

Per familiarizzare con le definizioni e le notazioni introdotte nella precedente sezione ci si accerti della banalità dei seguenti fatti che saranno usati nella prossima dimostrazione, ed altri equivalenti saranno usati nelle successive dimostrazioni ( $\epsilon > 0$ ):

$$\begin{aligned}\bar{R}(y, x) < d_0 - \epsilon &\Rightarrow \text{definitivamente } \tau_{r_n}(y) < r_n^{-d_0}, \\ \bar{d}_\mu(x) > d_1 + \epsilon &\Rightarrow \text{per infiniti } n \quad \mu(B_{r_n}(x)) < r_n^{d_1}.\end{aligned}$$

Una osservazione molto semplice ma fondamentale è la seguente:

$$\tau_{r_n}(y) < r_n^{-d_0} \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i=1}^{\lfloor r_n^{-d_0} \rfloor} T^{-i}(B_{r_n}(x)).$$

Essa è alla base del legame tra indicatore di tempo d'attesa e dimensione: punti con un breve tempo d'attesa sono contenuti in un grappolo di palle con lo stesso raggio mentre punti con un tempo lungo ne stanno fuori.

In questa sezione vogliamo mostrare come in generale i tempi di attesa sono lunghi o meglio l'indicatore di tempo d'attesa è maggiore della dimensione. Per fare questo sfrutteremo il fatto che i punti con un indicatore di tempo d'attesa piccola sono contenuti in grappoli di palle dai raggi via via più piccoli; quando l'indicatore è minore della dimensione possiamo mostrare che i punti contenuti in tutti (o infiniti) di questi grappoli hanno misura nulla.

Per fare ciò avremo bisogno del fatto che i raggi delle palle decrescano molto in fretta. Considereremo  $r_n = e^{-n}$ . Si noti che  $\sum_n r_n^d < \infty$  se e solo se  $d > 0$ .

**Teorema 4.1.** *Se  $(X, T)$  è un sistema che conserva una misura invariante  $\mu$  (non necessariamente finita) allora, fissato  $x$ , per  $\mu$ -quasi ogni  $y$  si ha:*

$$\overline{R}(y, x) \geq \overline{d}_\mu(x), \quad (4.1)$$

$$\underline{R}(y, x) \geq \underline{d}_\mu(x). \quad (4.2)$$

**Dimostrazione.** (4.1). Mostriamo che, fissato  $x$ ,  $\mu\{\overline{R}(y, x) < d_0\} = 0$  per ogni  $d_0 < \overline{d}_\mu(x)$ . Poiché, dalla definizione di  $\overline{R}$  e le proprietà dei limiti insiemistici e numerici,

$$\{\overline{R}(y, x) < d_0\} \subset \liminf_n \{\tau_{r_n}(y) < r_n^{-d_0}\} =: \liminf_n A_n$$

basta mostrare che  $\liminf_n \mu(A_n) = 0$ .

Dalla definizione di tempo d'attesa e dall'invarianza rispetto alla misura segue che:

$$\mu(A_n) \leq r_n^{-d_0} \mu(B_{r_n}(x)).$$

Dalla definizione di  $\overline{d}_\mu$  preso  $d_1 < \overline{d}_\mu(x)$  si ha che, per infiniti  $n$  ovvero per una sottosuccessione  $n_k$ ,

$$\mu(B_{r_{n_k}}(x)) < r_{n_k}^{d_1}.$$

La tesi segue ora dal fatto che posso prendere  $d_1 > d_0$  e

$$\liminf_n \mu(A_n) \leq \liminf_{n_k} \mu(A_{n_k}) \leq \liminf_{n_k} r_{n_k}^{d_1 - d_0} = 0.$$

(4.2). Preso  $d_0 < \underline{d}_\mu(x)$

$$\{\underline{R}(y, x) < d_0\} \subset \limsup_n \{\tau_{r_n}(y) < r_n^{-d_0}\} =: \limsup_n A_n.$$

Preso  $d_1 < \underline{d}_\mu(x)$  definitivamente

$$\mu(A_n) \leq r_n^{d_1-d_0}.$$

Poiché posso prendere  $d_1 > d_0$  ho che  $\sum_n \mu(A_n) < \infty$  e la tesi segue dal primo lemma di Borel-Cantelli (lemma A.1).  $\square$

I risultati di questa sezione sono presi da [BGI04] e [Ga05].

### 4.3 Tempi d'attesa in sistemi rapidamente mescolanti

Vogliamo mostrare che i punti con un indicatore di tempo d'attesa maggiore della dimensione hanno misura nulla. I punti con un indicatore grande stanno fuori dal grappolo di palle molto spesso e, se posso fare in modo che questo grappolo di palle si distribuisca uniformemente nello spazio, i punti che gli sfuggiranno saranno assai pochi.

Per fare ciò avremo bisogno di una successione di raggi che decresca molto lentamente in modo da avere palle che occupino più spazio e, qualora si distribuiscono uniformemente, sia più difficile che molti punti gli sfuggano. In particolare avremo bisogno che i raggi siano tali che le misure delle palle formino una serie divergente, altrimenti il secondo lemma di Borel-Cantelli<sup>1</sup> ci dice che ha misura nulla l'insieme dei punti che appartengono ad infinite palle.

Questo si può fare se la successione  $r_n$  va come  $n^{-\nu}$ ,  $0 < \nu < \min(1, 1/d_\mu)$  e segue dal fatto che  $\sum_{k=1}^n k^\alpha \approx n^{\alpha+1}$ . Ci accertiamo di questo fatto nella seguente proposizione che ci tornerà utile in altre occasioni:

**Proposizione 4.3.1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\sum_{k=1}^n k^\nu)}{\log n} = \nu + 1$$

o equivalentemente, per ogni  $0 < \gamma < 1$ , si ha che definitivamente

$$n^{\nu+\gamma} < \sum_{k=1}^n k^\nu < n^{\nu+\frac{1}{\gamma}}.$$

---

<sup>1</sup>Vedi appendice A, lemma A.3.

**Dimostrazione.**

$$\frac{n^{\nu+1}}{\nu+1} = \int_0^n x^\nu dx \geq \sum_{k=1}^n k^\nu \geq \int_1^n (x-1)^\nu dx = \frac{(n-1)^{\nu+1}}{\nu+1}$$

e la tesi segue applicando il logaritmo, dividendo per  $\log n$  e sbarazzandosi delle costanti e dei termini di ordine più basso tramite il passaggio al limite.  $\square$

*Osservazione 4.3.1.* La comparsa del  $d_\mu$  è dovuta al fatto che noi possiamo regolare i raggi ma il volume delle palle dipende dalla dimensione.

L'ingrediente fondamentale è il lemma 4.3, il quale garantisce che in un sistema rapidamente mescolante le nostre successioni di palle si distribuiscono uniformemente nello spazio. Questo lemma può essere visto come un rafforzamento dei classici lemmi di Borel-Cantelli in ambito dinamico (vedi discussione nell'appendice A). Abbiamo in questo modo delineato il programma che ci porterà a dimostrare il teorema A.

**Definizione 4.3.1.** Presa  $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice che essa ha decadimento polinomiale di grado  $\delta > 0$  se per ogni  $\alpha \leq \delta$  si ha che

$$n^\alpha \Phi(n) \rightarrow 0.$$

Se  $\Phi$  ha decadimento polinomiale di grado  $\delta$  per ogni  $\delta > 0$  si dirà che  $\Phi$  ha decadimento superpolinomiale.

**Definizione 4.3.2.** Si dice che un sistema  $(X, T, \mu)$  ha decadimento delle correlazioni polinomiale di grado  $\delta$  (superpolinomiale) se esiste  $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni  $\phi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  osservabili Lipschitz si ha che

$$\left| \int \phi \circ T^n \psi d\mu - \int \phi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq \|\phi\| \|\psi\| \Phi(n)$$

con  $\Phi(n)$  che ha decadimento polinomiale di grado  $\delta$  (superpolinomiale). Con  $\|\cdot\|$  si denota la norma Lipschitz.

Un sistema con decadimento delle correlazioni superpolinomiale si dirà anche *rapidamente mescolante*.

Come discusso nella sezione 3.6, per avere un decadimento superpolinomiale di funzioni caratteristiche di insiemi abbiamo bisogno di insiemi con una certa regolarità. Il prossimo lemma fornisce il raccordo tra decadimento e mescolamento nel caso specifico di nostro interesse di una successione di palle con raggio decrescente.

**Lemma 4.2.** *Sia  $B_{r_n}(x)$  per  $n \geq 1$  una successione di palle centrata in  $x$  e con raggio decrescente; sia  $A_n = T^{-n}(B_{r_n}(x))$  e pongo  $A_0 = X$ . Se  $(X, T, \mu)$  è un sistema con decadimento delle correlazioni maggiorato da  $\Phi(n)$  allora per  $k > j > 0$*

$$\mu(A_k \cap A_j) \leq \mu(A_{k-1}) \mu(A_{j-1}) + \frac{\Phi(k-j)}{(r_{k-1} - r_k)(r_{j-1} - r_j)}.$$

Ora passiamo al lemma fondamentale, la cui dimostrazione è simile alla dimostrazione della legge dei grandi numeri usando la disuguaglianza di Paley-Zigmund (vedi anche il teorema 1 in [FMP07]). L'idea è di stimare  $\mathbf{E}(Z_n^2)$  e trovare un limite superiore che assicuri che la distribuzione dei possibili valori di  $Z_n$  non si discosti troppo dalla media  $\mathbf{E}(Z_n)$ .

**Lemma 4.3.** *Siano  $A_n$  una successione di insiemi di misura decrescente ma tale che*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\sum_{k=1}^n \mu(A_k))}{\log n} = \alpha > 0$$

e suppongo che

$$\mu(A_k \cap A_j) \leq \mu(A_{k-1}) \mu(A_{j-1}) + \Phi(|k-j|)$$

con  $\Phi$  che ha decadimento superpolinomiale.

Allora ponendo  $Z_n(y) = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(y)$  si ha che quasi ovunque

$$\frac{Z_n}{\mathbf{E}(Z_n)} \rightarrow 1.$$

**Dimostrazione.** Stimiamo  $E((Z_n)^2)$ . Abbiamo che

$$E((Z_n)^2) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + 2 \sum_{k,j \leq n, k > j} \mu(A_k \cap A_j).$$

Ora sia  $0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$  e stimiamo il secondo addendo del membro di destra dividendolo in due parti nel modo seguente

$$\sum_{k,j \leq n, k > j} \mu(A_k \cap A_j) \leq \sum_{k,j \leq n, k > j, k < j + n^\delta} \mu(A_k \cap A_j) + \sum_{k,j \leq n, k \geq j + n^\delta} \mu(A_k \cap A_j)$$

la prima sommatoria può essere stimata come segue:

$$\sum_{k,j \leq n, k > j, k < j + n^\delta} \mu(A_k \cap A_j) \leq n^\delta E(Z_n)$$

nella seconda usiamo il lemma 4.2 ed otteniamo

$$\sum_{k,j \leq n, k \geq j+n^\delta} \mu(A_k \cap A_j) \leq \sum_{k,j \leq n, k \geq j+n^\delta} \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}) + n^2\Phi(n^\delta) \leq \frac{1}{2}(E(Z_n))^2 + n^2\Phi(n^\delta).$$

Quindi

$$\sum_{k,j \leq n, k > j} \mu(A_k \cap A_j) \leq n^\delta E(Z_n) + \frac{1}{2}(E(Z_n))^2 + n^2\Phi(n^\delta)$$

e

$$E((Z_n)^2) \leq (2n^\delta + 1)E(Z_n) + (E(Z_n))^2 + 2n^2\Phi(n^\delta)$$

ora osserviamo che

$$E((Z_n - E(Z_n))^2) = E(Z_n^2) - (E(Z_n))^2$$

quindi

$$E((Z_n - E(Z_n))^2) \leq (2n^\delta + 1)E(Z_n) + 2n^2\Phi(n^\delta) \quad (4.3)$$

Ora vogliamo confrontare  $Z_n$  con la sua media  $E(Z_n)$  e consideriamo

$$Y_n = \frac{Z_n}{E(Z_n)} - 1 = \frac{Z_n - E(Z_n)}{E(Z_n)}$$

quando  $Y_n = 0$ ,  $Z_n = E(Z_n)$ . Dai risultati sopra

$$E((Y_n)^2) \leq \frac{(2n^\delta + 1)E(Z_n) + 2n^2\Phi(n^\delta)}{(E(Z_n))^2}. \quad (4.4)$$

e  $\lim_{n \rightarrow \infty} E((Y_n)^2) = 0$ . Dunque esiste  $Y_{n_k}$  tale che  $Y_{n_k} \rightarrow 0$  q.o. D'altra parte vogliamo che l'intera successione vada a 0 q.o. Per ottenere ciò cerchiamo esplicitamente  $n_k$  e consideriamo

$$n_k = \inf\{n : E(Z_n) \geq k^2\}. \quad (4.5)$$

Osserviamo che poichè  $\Phi$  ha decadimento superpolinomiale si ha che

$$\sum_n n^2 \frac{\Phi(n^\delta)}{(E(Z_n))^2} < \infty.$$

Poiché per ogni piccolo  $\epsilon$  abbiamo che se  $k$  è grande abbastanza (per la definizione di  $\alpha$  ed il fatto che  $\mu(A_i) < 1$ )  $(k+1)^2 \geq E(Z_{n_k}) \geq (n_k)^{\alpha-\epsilon}$  allora  $n_k \leq (k+1)^{\frac{2}{\alpha-\epsilon}} \leq (2k)^{\frac{2}{\alpha-\epsilon}}$  quindi  $\frac{(2n_k^\delta+1)E(Z_{n_k})}{(E(Z_{n_k}))^2} = \frac{2n_k^\delta+1}{E(Z_{n_k})} \leq \frac{(4k)^{\frac{2\delta}{\alpha-\epsilon}}}{k^2}$  e poichè

$\delta < \frac{\alpha}{2}$ , possiamo supporre che  $\epsilon$  sia così piccolo che  $2\delta < \alpha - \epsilon$  e dunque  $\frac{2\alpha}{z-\epsilon} - 2 < -1$ . Ciò implica che  $\sum E((Y_{n_k})^2) < \infty$ , da cui  $Y_{n_k} \rightarrow 0$  q.o. e  $\frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_k})} \rightarrow 1$  quasi ovunque.

Ora se  $n_k \leq n \leq n_{k+1}$

$$\frac{Z_n}{E(Z_n)} \leq \frac{Z_{n_{k+1}}}{E(Z_{n_k})} = \frac{Z_{n_{k+1}}}{E(Z_{n_{k+1}})} \frac{E(Z_{n_{k+1}})}{E(Z_{n_k})} \leq \frac{Z_{n_{k+1}}}{E(Z_{n_{k+1}})} \frac{(k+2)^2}{k^2}$$

e

$$\frac{Z_n}{E(Z_n)} \geq \frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_{k+1}})} = \frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_k})} \frac{E(Z_{n_k})}{E(Z_{n_{k+1}})} \geq \frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_k})} \frac{k^2}{(k+2)^2}.$$

quindi abbiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{E(Z_n)} = 1$ ,  $\mu$ -quasi ovunque.  $\square$

*Osservazione 4.3.2.*  $\frac{Z_n}{\mathbf{E}(Z_n)} \rightarrow 1$  esprime il fatto che gli  $A_n$  si distribuiscono uniformemente nello spazio.

Per la dimostrazione del prossimo teorema abbiamo bisogno di una ipotesi supplementare, per la discussione della quale rimandiamo all'appendice B.

**Definizione 4.3.3.** Una misura si dice *esatto dimensionale* se la dimensione locale esiste quasi ovunque, ovvero se  $\bar{d}_\mu(x) = \underline{d}_\mu(x)$  per quasi ogni  $x$ . Un sistema che conserva una misura si dice *esatto dimensionale* se la misura lo è.

**Teorema A.** *Se  $(X, T, \mu)$  è esatto dimensionale e rapidamente mescolante allora, fissato  $x$ , si ha che per quasi ogni  $y$*

$$\underline{R}(y, x) = \bar{R}(y, x) = d_\mu(x).$$

**Dimostrazione.** Basta mostrare che  $\bar{R} \leq d_\mu$  quasi ovunque.

Anzitutto cerchiamo una successione di raggi di modo che le palle riempiano uniformemente lo spazio, ovvero cerchiamo  $r_n$  tali che  $A_n = T^{-n}B_{r_n}(x)$  soddisfi le ipotesi del lemma 4.3.

Preso  $d_1 > d_\mu(x)$  ho che  $\mu(A_n) > r_n^{d_1}$ . Considero la successione decrescente dei raggi

$$r_n := n^{-\alpha \frac{1}{d_1}}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4.6)$$

In questo modo ho che  $\mu(A_n) > n^{-\alpha}$  e la proposizione 4.3.1 ed il lemma 4.2 implicano che la successione  $A_n$  verifica le ipotesi del lemma 4.3, sicché quasi ovunque  $\frac{Z_n}{\mathbf{E}(Z_n)} \rightarrow 1$ .

Ora cerchiamo di individuare i punti con tempo d'attesa lungo e cerchiamo di accordare il nostro parametro  $\alpha$  in modo che su di essi le palle non si distribuiscano in maniera uniforme. Considero i punti  $y$  tali che  $\bar{R}(y, x) > d_0$  ovvero i punti per cui *per infiniti*  $n$  si ha che

$$\tau_{r_n}(y) > r_n^{-d_0} \quad \text{o equivalentemente} \quad y \notin \bigcup_{i=1}^{\lfloor r_n^{-d_0} \rfloor} T^{-i}(B_{r_n}(x)). \quad (4.7)$$

Cerco  $\beta > 1$  per cui  $Z_n(y) = Z_{n^\beta}(y)$  per infiniti  $n$ . Ho che

$$Z_n(y) = Z_{n^\beta}(y) \Leftrightarrow y \notin \bigcup_{i=n}^{\lfloor n^\beta \rfloor} T^{-i}(B_{r_i}(x)) \quad (4.8)$$

e noto che, poiché  $r_i \leq r_n$  per  $i \geq n$ , se  $r_n^{-d_0} \geq n^\beta$  allora

$$\bigcup_{i=1}^{\lfloor r_n^{-d_0} \rfloor} T^{-i}(B_{r_n}(x)) \supset \bigcup_{i=n}^{\lfloor n^\beta \rfloor} T^{-i}(B_{r_n}(x)) \supset \bigcup_{i=n}^{\lfloor n^\beta \rfloor} T^{-i}(B_{r_i}(x))$$

ovvero (4.7) implica (4.8).

Da (4.6) ho che  $r_n^{-d_0} = n^{\alpha \cdot \frac{d_0}{d_1}}$ . Preso  $d_0 > d_1$  (quindi  $\bar{R}(y, x) > \bar{d}_\mu(x)$ ) posso sempre trovare un  $\alpha$  vicino ad 1 per cui

$$\beta := \alpha \cdot \frac{d_0}{d_1} > 1.$$

Preso un  $\epsilon > 0$  posso prendere  $d_1$  in modo che  $d_\mu \in [d_1 - \epsilon, d_1 + \epsilon]$ . In questo modo ho che  $r_n^{d_1 - \epsilon} < \mu(B(x, r_n)) < r_n^{d_1 + \epsilon}$ . Ricordo che  $r_n^{d_1 \pm \epsilon} = n^{\alpha(\frac{\epsilon}{d_1} \mp 1)}$  ed esistono costanti  $k_1, k_2$  tali che definitivamente  $k_1 n^{1 - \alpha(\frac{\epsilon}{d_1} + 1)} < \mathbf{E}(Z_n) < k_2 n^{1 - \alpha(\frac{\epsilon}{d_1} - 1)}$ . Consideriamo:

$$\frac{\mathbf{E}(Z_n)}{\mathbf{E}(Z_{n^\beta})} \leq \frac{k_2 n^{1 - \alpha(\frac{\epsilon}{d_1} - 1)}}{k_1 n^{\beta(1 - \alpha(\frac{\epsilon}{d_1} + 1))}}$$

Posso scegliere  $\epsilon$  in modo che  $\beta(1 - \alpha(\frac{\epsilon}{d_1} + 1)) > 1 - \alpha(\frac{\epsilon}{d_1} - 1)$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(Z_n)}{\mathbf{E}(Z_{n^\beta})} = 0.$$

in questo modo ho che  $\liminf_n \frac{Z_n}{\mathbf{E}(Z_n)} = 0$  e ciò, per il lemma 4.3, può accadere soltanto per gli  $y$  contenuti in un insieme di misura nulla.

Prendendo  $d_1$  e  $d_0$  arbitrariamente vicini a  $d_\mu$  si ha la tesi.  $\square$

I risultati di questa sezione sono in [Ga $\infty$ ].

## 4.4 Ricorrenza come limite inferiore

Per i risultati di questa e della prossima sezione dobbiamo imporre una condizione aggiuntiva sulla misura detta di ‘debole regolarità diametrica’ che ci permetta di controllare in parte il comportamento di  $\mu(B(x, r))$  per  $r \rightarrow 0$ . Vedremo che tutte le misure di probabilità boreliane su sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{R}^d$  godono di questa proprietà.

Una misura si dice *diametricamente regolare*<sup>2</sup> se esiste una costante  $c \geq 1$  per cui  $\mu(B(x, 2r)) \leq c \mu(B(x, r))$  per ogni  $x \in X$  e  $r > 0$ .

**Definizione 4.4.1.** Una misura è *debolmente diametricamente regolare* su  $X$  se si ha che per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$  ed ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che per ogni  $r < \delta$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq r^{-\epsilon} \mu(B(x, r)). \quad (4.9)$$

*Osservazione 4.4.1.* Si verifica che se  $\mu$  è una misura diametricamente regolare su un insieme  $X$ , allora per *ogni* fissata costante  $\eta > 1$  esiste  $\delta = \delta(x, \epsilon, \eta) > 0$  per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$  ed ogni  $\epsilon > 0$ , tale che, sostituendo il 2 con  $\eta$ , (4.9) vale per ogni  $r < \delta$ .

*Osservazione 4.4.2.* Si hanno le seguenti implicazioni:

$$\text{Lebesgue} \Rightarrow \text{esatto-dim.} \Rightarrow \text{diam. reg.} \Rightarrow \text{deb. diam. reg.}$$

Si ha il seguente fatto, per la dimostrazione del quale rimandiamo a [BaSa01], l’articolo da cui è tratto il materiale per questa sezione:

**Proposizione 4.4.1.** *Ogni misura di probabilità boreliana su  $X \subset \mathbb{R}^d$  è debolmente diametricamente regolare.*

La seguente osservazione segue direttamente dalla definizione di tempo d’attesa e fornisce una relazione tra il tempo di ricorrenza di punti ‘asintoticamente vicini’:

*Osservazione 4.4.3.* Presi  $x, y \in X$  tali che  $d(x, y) < r$  si ha che

$$\tau_{4r}(y) \leq \tau_{2r}(y, x) \leq \tau_r(x). \quad (4.10)$$

Richiamiamo la seguente definizione standard di topologia che ci permette di costruire un griglia numerabile di punti in modo che ogni altro punto sia ‘vicino’ ad uno dei punti della griglia:

<sup>2</sup>La condizione che definisce una misura diametricamente regolare è nota come *doubling condition*.

**Definizione 4.4.2.** Un sottoinsieme  $E$  di uno spazio metrico  $(X, d)$  è detto  $r$ -separato se presi  $x_0, x_1 \in X$  punti distinti, si ha che  $d(x_0, x_1) \geq r$ . Si dice che  $E$  è una  $r$ -rete se è un insieme  $r$ -separato massimale o equivalentemente se  $X = \bigcup_{x \in E} B(x, r)$ .

*Osservazione 4.4.4.* Si noti che presa un insieme  $r$ -separato si ha che gli insiemi  $B(x, \frac{r}{2})$  sono disgiunti. Se lo spazio metrico è separabile ogni  $r$ -rete è dunque al più numerabile.

Enunciamo e dimostriamo il risultato centrale della sezione:

**Teorema 4.4.** *Sia  $T$  una mappa Borel misurabile su  $X$  e  $\mu$  una misura di probabilità  $T$ -invariante su  $X$ . Se  $\mu$  è debolmente diametricamente regolare su  $X$  allora per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$*

$$\begin{aligned}\overline{R}(x) &\leq \overline{d}_\mu(x), \\ \underline{R}(x) &\leq \underline{d}_\mu(x).\end{aligned}$$

*Osservazione 4.4.5.* Il teorema si applica anche nel caso in cui  $\mu$  sia debolmente diametricamente regolare su  $Z \subset X$  con  $\mu(Z) > 0$ . In tal caso le disuguaglianze valgono per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in Z$ .

**Dimostrazione.** Osservo che la funzione  $\delta(x, \epsilon)$  nella definizione di misura debolmente diametricamente regolare può essere resa misurabile. Fissato  $\epsilon > 0$  si può scegliere  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo tale che l'insieme

$$G = \{x \in X \mid \delta(x, \epsilon) > \delta\}$$

ha misura  $\mu(G) > 1 - \epsilon$ .

Cerchiamo di stimare la misura dell'insieme dei punti che hanno un tempo di ricorrenza 'lungo' rispetto al tempo atteso, cioè quello dato dal teorema di Kac. Per ogni  $r, \lambda > 0$  e  $x \in X$  considero l'insieme

$$A_{r,x} = \{y \in B(x, 2r) \mid \tau_{2r}(y, x) \mu(B(x, 2r)) \geq \lambda\}.$$

Dalla definizione e dal teorema di Kac (vedi osservazione 3.3.1) si ha che

$$\mu(A_{r,x}) = \frac{\mu(B(x, 2r))}{\lambda} \int_{A_{r,x}} \frac{\lambda}{\mu(B(x, 2r))} d\mu(y) \leq \frac{\mu(B(x, 2r))}{\lambda} \int_{B(x, 2r)} \tau_{2r}(y, x) d\mu(y) \leq \frac{\mu(B(x, 2r))}{\lambda}.$$

Dall'osservazione (4.4.3) e dal fatto che  $B(x, r) \subset B(x, 2r)$  si ha inoltre

$$\mu\{y \in B(x, r) \mid \tau_{4r}(y) \mu(B(x, r)) \geq \lambda\} \leq \mu(A_{r,x}) \leq \frac{\mu(B(x, 2r))}{\lambda}.$$

Considero ora una  $r$ -rete numerabile  $E \subset G$  e pongo  $\lambda = r^{-3\epsilon}$ . Usando la definizione di  $r$ -rete e la subadditività della misura, la definizione di misura deb. diam. reg. ((4.9) che usiamo due volte) e l'osservazione (4.4.4) otteniamo

$$\begin{aligned} D_\epsilon(r) &:= \mu\{y \in G \mid \tau_{4r}(y) \mu(B(x, r)) \geq r^{-3\epsilon}\} \\ &\leq \sum_{x \in E} \mu\{y \in B(x, r) \mid \tau_{4r}(y) \mu(B(x, r)) \geq r^{-3\epsilon}\} \\ &\leq r^{3\epsilon} \sum_{x \in E} \mu(B(x, 2r)) \leq r^\epsilon \sum_{x \in E} \mu(B(x, \frac{r}{2})) \\ &\leq r^\epsilon. \end{aligned}$$

Infine presa la successione di raggi  $r_n = e^{-n}$  ho che  $\sum_{n > -\log \delta} D_\epsilon(r_n) < \infty$  ed il primo lemma di Borel-Cantelli implica che per quasi ogni  $x \in G$  si ha che, definitivamente

$$\tau_{4r_n}(y) \mu(B(x, r_n)) \geq r_n^{-3\epsilon};$$

applicando il logaritmo e dividendo per  $\log r_n$  questo è equivalente a

$$\frac{\tau_{4r_n}}{-\log r_n} \geq \frac{\mu(B(x, r_n))}{\log r_n} + 3\epsilon.$$

La tesi segue, prendendo i limiti inferiori e superiori (vedi proposizione 4.1.1), dall'arbitrarietà di  $\epsilon$ .  $\square$

Il seguente corollario segue immediatamente dal teorema 4.4 e dalla proposizione 4.4.1.

**Corollario 4.5.** *Se  $T : X \circlearrowleft$  è una trasformazione Borel misurabile su  $X \subset \mathbb{R}^d$  e  $\mu$  è una misura di probabilità  $T$ -invariante su  $X$  allora per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$*

$$\begin{aligned} \overline{R}(x) &\leq \overline{d}_\mu(x), \\ \underline{R}(x) &\leq \underline{d}_\mu(x). \end{aligned}$$

*Osservazione 4.4.6.* Il corollario si applica anche nel caso in cui  $X$  sia un sottoinsieme misurabile di una varietà liscia finito-dimensionale, grazie al teorema di immersione di Whitney.

I risultati di questa sezione sono presi da [BaSa01].

## 4.5 Ricorrenza in sistemi rapidamente mescolanti

Supponendo che la misura sia debolmente diametricamente regolare o, equivalentemente, che sia una misura di probabilità boreliana su di un sottoinsieme dello spazio euclideo, [Sa06] dimostra il seguente:

**Teorema B.** *Se  $(X, T, \mu)$  è rapidamente mescolante, l'entropia del sistema è positiva e la mappa è Lipschitz, allora per quasi ogni  $x \in X$*

$$\overline{R}(x) = \overline{d}_\mu(x) \quad e \quad \underline{R}(x) = \underline{d}_\mu(x). \quad (4.11)$$

Discutiamo brevemente le idee su cui si basa questo teorema, rimandando all'articolo originale per le dimostrazioni dei lemmi necessari ed ulteriori considerazioni. Per la definizione di entropia ed alcuni risultati legati ad essa (teorema di Ornstein-Weiss) si veda l'appendice C.

L'ingrediente fondamentale è la seguente

*Proprietà 4.5.1.* Un punto si dice che ha la *proprietà di volo lungo* se presi  $\epsilon, \delta > 0$  esiste un  $r_0 > 0$  tale che per ogni  $0 < r < r_0$

$$T^n x \notin B(x, r) \quad \text{per ogni intero } n \in [r^{-\delta}, \mu(B(x, r))^{-1+\epsilon}]. \quad (4.12)$$

Questa proprietà viene utilizzata per dimostrare il teorema nel seguente modo:

**Proposizione 4.5.1.** *Quasi ogni punto  $x \in \{\underline{R}_\mu(x) > 0\}$  che gode della proprietà di volo lungo verifica (4.11).*

**Dimostrazione.** Per il teorema 4.4 ho che quasi ovunque  $\underline{R} \leq \underline{d}$  e  $\overline{R} \leq \overline{d}$ . La prima disuguaglianza implica che quasi ovunque  $\{\underline{R} > \delta\} \subset \{\underline{d} > \delta\}$ . Preso  $\delta > 0$  ho che preso  $x \in \{\underline{R} > \delta\}$  per  $r$  sufficientemente piccolo si ha  $\tau_r(x) \geq r^{-\delta}$ . Preso  $\epsilon > 0$  l'ipotesi implica che per  $r$  piccolo

$$\tau_r(x) \geq \mu(B(x, r))^{-1+\epsilon}.$$

Prendendo il logaritmo e dividendo per  $\log r$  ho che  $\overline{R} \geq (1 - \epsilon)\overline{d}_\mu$  e  $\overline{R} \geq (1 - \epsilon)\underline{d}_\mu$ . La tesi segue per l'arbitrarietà di  $\epsilon$ .  $\square$

Le tre ipotesi del teorema sono utilizzate nei seguenti tre lemmi i quali, congiuntamente alla proposizione 4.5.1, forniscono la dimostrazione della tesi.

**Lemma 4.6.** *Sia  $(X, T, \mu)$  un sistema rapidamente mescolante con  $\mu$  debolmente diametricamente regolare. Preso  $a > 0$  quasi ogni punto in  $\{\underline{d}_\mu > a\}$  verifica la proprietà di volo lungo.*

**Lemma 4.7.** *Assumo l'esistenza sullo spazio delle fasi di una partizione  $\xi$  che gode della seguente*

- Proprietà di interno spazioso: per  $\mu$ -quasi ogni  $x$  esiste  $\chi = \chi(x) < \infty$  tale che definitivamente  $B(x, e^{-x^n}) \subset \chi^n(x)$ .

*Se l'entropia  $h_\mu(T, \xi) > 0$  allora  $\bar{R} > 0$  quasi ovunque.*

**Lemma 4.8.** *Assumo che il sistema  $(X, T, \mu)$  verifichi la seguente condizione*

- Ragionevole sensibilità: per  $\mu$ -quasi ogni  $x$  esistono  $\gamma, \lambda > 0$  tali che  $T^n$  è  $e^{\lambda n}$ -lipschitz sulla palla  $B(x, e^{-\gamma n})$  per  $n$  sufficientemente grande.

*Se l'entropia  $h_\mu(T, \xi) > 0$  allora esiste una partizione che ha la proprietà di interno spazioso (vedi lemma 4.7).*

Una mappa Lipschitz verifica la condizione di ragionevole sensibilità di quest'ultimo lemma, dunque per una mappa di entropia positiva il lemma 4.7 ci garantisce che l'indicatore di ricorrenza è limitato dal basso ed il mescolamento rapido viene usato per avere la proprietà di volo lungo nel lemma 4.6. Il lemma 4.7 è una applicazione immediata del teorema di Ornstein-Weiss. A conclusione della sezione diamo una idea di come viene utilizzata l'ipotesi di decadimento delle correlazioni nel lemma 4.6.

Il mescolamento di un sistema implica che  $\mu(B \cap T^{-n}B) = \mathcal{O}(\mu(B)^2)$  per  $n$  grande. Se considero l'insieme  $B \cap \bigcup_{i=n}^{n+\ell} T^{-i}B$  la sua misura è limitata da  $\mathcal{O}(\ell \mu(B)^2)$ . Se  $\ell \leq \mu(B)^{-1+\epsilon}$  allora otteniamo che la proporzione di punti di  $B$  che entrano in  $B$  nell'intervallo di tempo  $[n, n + \ell]$  è limitata da  $\mathcal{O}(\mu(B)^\epsilon)$ .

Usando il decadimento delle correlazioni si può mostrare che quest'ultima affermazione è vera per  $n$  dell'ordine di  $r^{-\delta}$  per un qualche  $\delta > 0$ , nel caso in cui  $B$  è una palla di raggio  $r$ . Usando un lemma di Borel-Cantelli (e la debole diametrica regolarità della misura) si può mostrare che un punto tipico gode della proprietà di volo lungo.



# Capitolo 5

## Esempi e note

In questo capitolo discutiamo i teoremi del capitolo precedente, con particolare attenzione ai teoremi A e B che forniscono l'uguaglianza tra indicatori e dimensione locale nel caso di tempi di attesa e ricorrenza.

Nella prima sezione si fornisce l'unico 'controesempio' noto ai teoremi A e B: le rotazioni sulla circonferenza con numero bene approssimabile dai razionali. Inoltre si nota come questo esempio sia fondamentale per lo studio delle mappe sulla circonferenza.

Nella seconda sezione si discutono risultati simili, applicazioni, esempi che mostrano come le ipotesi non possano essere indebolite, esempi e risultati che mostrano come la tesi valgano in casi e contesti più ampi di quelli considerati. Si indicano inoltre alcune questioni aperte ad investigazioni future. Per le definizioni standard si rimanda a [HaKa02].

Poco prima della consegna si è conclusa una simulazione numerica condotta su Maple per la determinazione della dimensione locale in un punto dell'attrattore di Hénon. È inclusa nell'ultima sezione insieme ad una breve discussione.

### 5.1 Rotazioni sulla circonferenza

Consideriamo il sistema dinamico sulla circonferenza in cui la trasformazione è la rotazione per un angolo fissato la misura invariante è quella di Lebesgue sulla varietà, o equivalentemente sia  $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , l'insieme dei numeri reali modulo 1,  $Tx = x + \alpha$  per  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\mu$  la misura indotta dalla misura di Lebesgue sulla retta reale. Per  $x \in \mathbb{R}$  denotiamo con  $\|x\|$  la distanza dall'intero più vicino ( $\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ ). La misura  $\mu$  è esatto dimensionale è la dimensione locale è 1 in ogni punto.

Per  $\alpha$  razionale il sistema è periodico. In osservanza ai teoremi 4.1 e 4.4

del capitolo 4 l'indicatore di ricorrenza è nullo per ogni punto e l'indicatore di tempo d'attesa è infinito per ogni coppia di punti non facenti parte della stessa orbita e nullo altrimenti.

Per  $\alpha$  irrazionale il sistema è ergodico e non mescolante. Per verificare la prima affermazione mostriamo che ogni funzione  $f \in L^2$  invariante è costante (vedi proposizione 3.2.1). Consideriamo l'espansione in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

L'invarianza implica che  $a_n = a_n e^{2\pi i n \alpha}$  e poiché  $e^{2\pi i n \alpha} \neq 1$  per ogni  $n \neq 0$  si ha che  $f = a_0$  è costante.

Per la seconda affermazione mostriamo che esiste un insieme di misura positiva  $A$  per il quale  $\mu(A \cap T^n A) = 0$  per infiniti  $n$ . Prendo come  $A$  un intervallo centrato in 0 di misura  $0 < \mu(A) < 1/2$ . Per l'ergodicità, scelto un  $\epsilon > 0$  esistono infiniti  $n$  per cui  $T^n 0$  è in una palla di raggio  $\epsilon$  intorno  $\frac{1}{2}$ . Poiché  $T$  è una isometria, data la scelta sulla misura di  $A$  posso trovare un  $\epsilon$  per cui  $T^n A \cap A = \emptyset$  per gli infiniti  $n$  trovati prima.

Il teorema di Birkhoff assicura dunque che presa  $f \in L^1$  per quasi ogni  $x$  si ha che

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x + i\alpha) \rightarrow \int f d\mu.$$

Un teorema di H. Weyl mostra che questo accade per ogni  $x$  qualora  $f$  sia integrabile secondo Riemann. L'articolo di Weyl ([Wey16]) è considerato il primo esempio di dimostrazione dell'ergodicità di un sistema<sup>1</sup>.

Le rotazioni sono un sistema dinamico dipendente da un parametro ( $\alpha$ ) al variare del quale si susseguono indistricabilmente fenomeni periodici ed ergodici. I fenomeni periodici sono quelli per cui le disuguaglianze tra indicatori e dimensione sono strette al massimo ( $0 < 1 < \infty$ ), mostriamo ora che quando il comportamento ergodico è bene approssimato dal comportamento ergodico, le disuguaglianze rimangono in parte strette. Per far ciò abbiamo bisogno di qualcosa che quantifichi la capacità di un numero irrazionale di essere approssimato dai numeri razionali.

**Definizione 5.1.1.** Un numero  $\alpha$  è detto bene approssimabile dai razionale se  $\eta(\alpha) > 1$  dove  $\eta$  è l'estremo superiore tra gli esponenti che verificano

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\eta+1}}; \tag{5.1}$$

---

<sup>1</sup>Per maggiori informazioni si veda [Pet83] dove tra l'altro si applica il teorema di Weyl al *problema di Gelfan'd*: trovare la frequenza del numero 7 nella successione 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, ... delle prime cifre (in notazione decimale) delle potenze di 2.

per infinite coppie  $(p, q)$  di interi primi tra loro.

Il fatto che  $\eta \geq 0$  per ogni numero reale è una semplice applicazione del *principio della piccioniata* (o dei cassetti); questo principio fu introdotto da Dirichlet nello stesso articolo per dimostrare che  $\eta \geq 1$  per ogni numero reale. Esistono numeri reali per ogni  $\eta > 1$ , anche numeri di tipo infinito che sono detti *numeri di Liouville*<sup>2</sup>. Per ulteriori informazioni sull'approssimazione Diofantea (approssimazione di reali tramite razionali) e l'approssimazione Diofantea metrica (cioè che tratta le stesse questioni dal punto di vista della misura), rimandiamo a [Kh], [Cas57], [Sc80] e [Ni63].

Vediamo ora come un semplice calcolo ci permetta di stabilire che per una rotazione di un numero irrazionale  $\alpha$  si ha che

$$\underline{R}(x) \leq \frac{1}{\eta},$$

dunque per le rotazioni con numeri bene approssimabili dai razionali vale la disuguaglianza stretta tra indicatore di ricorrenza inferiore e dimensione locale.

L'indicatore di ricorrenza è costante per ogni punto poiché il sistema è invariante per traslazioni, quindi considero l'origine. Sia  $0 < q_1 < q_2 < \dots$  una successione di numeri interi crescenti per cui vale la definizione di numero bene approssimabile dai razionali (5.1); moltiplicando per  $q_n$  si ha

$$|q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_n^\eta}.$$

Questo implica che  $\tau_{1/q_n^\eta}(0) \leq q_n$  e si conclude con

$$\underline{R}(0) \leq \liminf_n \frac{\log \tau_{1/q_n^\eta}(0)}{\log q_n^\eta} \leq \frac{1}{\eta} < 1 = d_\mu(0).$$

Si hanno inoltre risultati più precisi al riguardo.

**Definizione 5.1.2.** Definiamo il *tipo*  $\nu$  di un numero irrazionale  $\alpha$  come

$$\nu = \sup\{\eta \mid \liminf_n n^\eta \|n\alpha\| = 0\}.$$

In [ChSe01] si mostra il seguente

**Teorema 5.1.** *Per le rotazioni di un numero irrazionale con tipo  $\eta$  si ha che per quasi ogni  $x$*

$$\begin{aligned} \overline{R}(x) &= 1, \\ \underline{R}(x) &= \frac{1}{\eta}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Un esempio è  $\sum_n \frac{1}{10^{n!}}$ , il primo esempio di numero reale trascendente (non algebrico).

In [KiSe03] si dimostra il risultato analogo per i tempi di attesa:

**Teorema 5.2.** *Per le rotazioni di un numero irrazionale con tipo  $\eta$  si ha, fissato  $y$ , per quasi ogni  $x$*

$$\begin{aligned} \underline{R}(x, y) &= 1 \\ , \overline{R}(x, y) &= \eta. \end{aligned}$$

Concludiamo questa sezione ricordando un teorema dimostrato da Denjoy, partendo da risultati di Poincaré, per il quale rimandiamo a [Yoc92], [He79].

**Teorema 5.3.** *Se  $f$  è un diffeomorfismo di  $\mathbb{S}^1$  privo di punti periodici, e se la derivata  $Df$  è a variazione limitata (per esempio  $f \in C^2$ ), allora  $f$  è topologicamente coniugato ad una rotazione irrazionale.*

Dunque è fondamentale studiare le rotazioni per comprendere le mappe sulla circonferenza. Per l'importanza reale delle mappe sulla circonferenza si vedano alcuni degli articoli nelle raccolte [Cv89], [Hao84].

## 5.2 Altri esempi ed osservazioni sparse

**(a: sistemi uniformemente iperbolici)** I primi risultati ad apparire sull'uguaglianza tra indicatori e dimensione riguardano i sistemi uniformemente iperbolici. I risultati per la ricorrenza sono in [BaSa01], mentre quelli per i tempi di attesa sono in [Ga06] e li riassumiamo nel seguente:

**Teorema 5.4.** *Se  $X$  è un insieme iperbolico localmente massimale (isolato) di un diffeomorfismo Axiom A su una varietà liscia compatta e  $\mu$  è una misura di equilibrio (ergodica) per un potenziale di Hölder definito su  $X$  allora*

$$\underline{R}(y, x) = \underline{d}_\mu(x) \quad e \quad \overline{R}(y, x) = \overline{d}_\mu(x),$$

dove l'uguaglianza vale, fissato  $x$ , per quasi ogni  $y$  oppure preso  $x = y$  (ricorrenza) vale per quasi ogni  $x$ .

Questo risultato è un corollario dei teoremi A e B, in seguito a quanto discusso nella sezione 2.3. Per una dimostrazione del decadimento delle correlazioni per sistemi uniformemente iperbolici si veda [Vsdds]. Dunque i teoremi A e B si possono applicare ad esempi come il ferro di cavallo di Smale, il solenoide di Smale e gli automorfismi iperbolici del toro.

**(b: esempio non uniformemente iperbolico)** Una matrice  $A \in SL(k, \mathbb{Z})$ , ovvero ad entrate intere e con determinante 1, dà luogo ad una

trasformazione del toro  $\mathbb{T}^k$  tramite  $f(x) = Ax \bmod \mathbb{Z}^k$ . La mappa  $f$  è detta *automorfismo torale* e conserva la misura di Lebesgue. È ergodica se e solo se la matrice  $A$  non ha autovalori radici dell'unità.

Sfruttando la natura algebrica dell'esempio Lind ([Li82]) ha stabilito il decadimento esponenziale delle correlazioni usando la trasformata di Fourier. Questo è più che sufficiente per applicare i teoremi A e B ed ottenere che

$$R(y, x) = k = R(x)$$

per Lebesgue quasi ogni punto  $y$ , fissato  $x$ , per la prima uguaglianza e per quasi ogni  $x$  nella seconda uguaglianza.

**(c: struttura prodotto per la ricorrenza e repulsori)**

Barreira e Saussol ([BaSa02]) hanno dimostrato un risultato riguardo alla struttura prodotto della ricorrenza che gli ha permesso di estendere i risultati sui sistemi uniformemente iperbolici ai sistemi con un repulsore. Un insieme invariante e compatto  $X \subset M$  di una mappa differenziabile  $T$  su una varietà liscia  $M$  è detto *repulsore* se esistono costanti  $c > 0$  e  $\beta > 1$  tali che

$$\|D_x T^n v\| \geq c\beta^n \|v\|$$

per ogni  $n > 0, x \in X, v \in T_x M$ . Anche i risultati sui repulsori di sistemi dinamici sono compresi nei teoremi A e B (vedi sezione 2.3). Consideriamo la mappa torale (detta endomorfismo torale) definita da una matrice  $A$  come nella nota precedente. Se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori fuori dal disco unitario la mappa non è invertibile ed il toro  $\mathbb{T}^k$  è un repulsore per essa. Anche per questa mappa si ha che  $R(y) = k = R(y, x)$  per Lebesgue quasi ogni  $y$  (fissato  $x$ ).

**(d: due esempi di repulsori in teoria dei numeri)** Sia  $x = 0.x_1x_2 \dots$  la rappresentazione in base  $m$  del numero  $x \in [0, 1]$  (tale rappresentazione è unica eccetto che per un insieme numerabile di punti). Considerando  $[0, 1]$  come un repulsore della trasformazione  $x \mapsto mx \pmod{1}$  i risultati di [BaSa02] mostrano che per quasi ogni  $x \in [0, 1]$  per  $r \rightarrow 0$

$$\inf\{n > 0 : |0.x_nx_{n+1} \dots - 0.x_1x_2 \dots| < r\} \approx \frac{1}{r}.$$

Un altro esempio è dato dalle frazioni continue. Scrivendo  $x \in (0, 1)$  come una frazione continua

$$x = [a_1, a_2, a_3, \dots] := \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{m_r + \dots}}}$$

con  $a_i \in \mathbb{N}$  (di nuovo la rappresentazione è unica eccetto che su un insieme numerabile), si consideri la mappa di Gauss  $Tx = \frac{1}{x} \pmod{1}$  che agisce come uno shift sulla successione degli  $a_i$ . Anche in questo caso si ha che per quasi ogni  $x \in (0, 1)$  per  $r \rightarrow 0$

$$\inf\{n > 0 : |[a_n, a_{n+1}, \dots] - [a_1, a_2, \dots]| < r\} \approx \frac{1}{r}.$$

**(e: ricorrenza nel caso unidimensionale)** Nel caso di mappe unidimensionale un teorema di [STV02] garantisce l'uguaglianza di indicatore di ricorrenza e dimensione sotto ipotesi molto generali. Più precisamente si dimostra:

**Teorema 5.5.** *Sia  $T$  una trasformazione monotona a tratti con una derivata con  $p$ -variazione limitata per qualche  $p > 0$ . Se  $\mu$  è una misura ergodica  $T$ -invariante con entropia non nulla allora per  $\mu$ -quasi ogni  $x$ :*

$$R(x) = d_\mu(x).$$

La dimostrazione si basa sulla nota connessione tra entropia ed esponenti di Lyapunov (vedi per es. [You95]) e sul teorema di Ornstein-Weiss, insieme ad una parte tecnica per stimare le misure delle palle in termini di quelle dei cilindri di una partizione.

Si noti che il risultato equivalente al teorema di Ornstein-Weiss per i tempi di attesa è stato dimostrato da Shields ([Sh93], vedi anche [Sh96]) sotto ipotesi considerevolmente più forti sul sistema (Bernoulli), che implicano una forte mescolamento; dunque un risultato analogo nel caso dei tempi di attesa sarebbe compreso nel teorema A.

**(f: esempio parabolico)** Consideriamo la mappa di Manneville-Pomeau, definita su  $[0, 1]$  e dipendente da un parametro  $\alpha$ :

$$T(x) = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha) & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A causa della presenza di un punto fisso indifferente ( $T'^+(0) = 1$ ) la mappa è non uniformemente iperbolica. Per  $\alpha \in (0, 1)$  la mappa ha un'unica misura di probabilità invariante finita che è ergodica ed assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue ([Th83], vedi più avanti per i valori del parametro  $\alpha > 1$ ). Questa mappa è studiata nel fenomeno dell'intermittenza ed è alle volte inclusa nella classe dei sistemi parabolici (per la tricotomia dei sistemi dinamici in ellittici, parabolici ed iperbolici si veda [HaKa02]) a causa del decadimento polinomiale delle correlazioni (vedi sezione 2.3). L'entropia del

sistema è positiva dunque si può usare il teorema della nota precedente per mostrare che l'indicatore di ricorrenza è 1.

**(g: connessione con le leggi statistiche asintotiche)** Risultati sulle leggi statistiche possono essere usati per dimostrare teoremi di uguaglianza tra indicatori e dimensione. Riportiamo due risultati: uno sulla ricorrenza ([BaSa01]) e l'altro sui tempi di attesa ([Ga05]).

Ricordiamo la definizione di distribuzione di tempo di ritorno della sezione 3.4, introducendo una notazione<sup>3</sup> per il ritorno in palle centrate in  $x$  di raggio  $r$ :

$$F_{x,r}(t) = \frac{\mu(\{y \in B(x,r) : \tau_r(y,x) > t/\mu(B(x,r))\})}{\mu(B(x,r))}.$$

**Definizione 5.2.1.** Consideriamo l'insieme

$$A_\epsilon(x,r) = \{y \in B(x,r) : \tau_r(y,x) \leq \mu(B(x,r))^{-1+\epsilon}\}.$$

Diremo che la misura  $\mu$  ha un *lungo tempo di ritorno*, rispetto alla trasformazione  $T$ , se

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(A_\epsilon(x,r))}{\log \mu(B(x,r))} > 1.$$

per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$  ed ogni  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccolo.

Se un sistema ha la statistica del tempo di ritorno esponenziale per quasi ogni punto allora ha tempo di ritorno lungo, ma anche altri sistemi godono di questa proprietà, come la mappa di Manneville-Pomeau della precedente nota ([BaSa01]). Questa nozione è cruciale per i risultati di Barreira e Saussol citati sopra, infatti si ha il seguente:

**Teorema 5.6.** ([BaSa01]) *Sia  $T : X \rightarrow X$  una trasformazione Borel misurabile su di un insieme misurabile  $X \subset \mathbb{R}^d$  e  $\mu$  un misura di probabilità  $T$ -invariante su  $X$ . Se  $\mu$  ha tempo di ritorno lungo e  $\underline{d}_\mu(x) > 0$  per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$  allora si ha che quasi ovunque*

$$\underline{R}(x) = \underline{d}(x) \quad e \quad \bar{R}(x) = \bar{d}(x).$$

Nel caso dei tempi di attesa si ha una ipotesi più debole ma solo metà della tesi.

**Definizione 5.2.2.** Consideriamo l'insieme

$$A_l(x,r) = \{y \in B(x,r) : \tau_r(y,x) \leq l\mu(B(x,r))^{-1}\}.$$

<sup>3</sup>Si noti che la funzione di distribuzione usata qui è il complemento a 1 di quella precedentemente introdotta.

Diremo che il sistema ha *statistica di tempo di ritorno ragionevole* in  $x$  se esiste un  $l > 0$  tale che

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A_l(x, r))}{\mu(B(x, r))} < 1.$$

Un sistema in cui la statistica del tempo di ritorno converge ad una qualsiasi legge non banale soddisfa la definizione, in particolare sono inclusi il caso dei sistemi con legge esponenziali e le rotazioni con numero irrazionale ([Coe00]).

**Teorema 5.7.** ([Ga05]) *Se  $(X, T, \mu)$  è ergodico, la misura è finita, non atomica ed ha statistica di tempo di ritorno ragionevole in  $x$ , allora per quasi ogni  $y$*

$$\underline{R}(y, x) = \underline{d}_\mu(x).$$

Si noti che per un risultato sui tempi di attesa si usa la statistica dei tempi di ritorno e non quella dei tempi di attesa.

**(h: tempi d'attesa e lemmi di Borel-Cantelli dinamici)** L'ingrediente cruciale per la dimostrazione dell'uguaglianza tra indicatore di tempo di attesa e dimensione è solitamente un lemma di Borel-Cantelli dinamico (ovvero che considera le controimmagini di un una successione di insiemi). Nell'articolo [GaKi06] si dà maggiore sostanza a questa affermazione un po' vaga.

**Definizione 5.2.3.** Fissato  $x \in X$ , diciamo che un punto  $y$  di un sistema dinamico che conserva una misura di probabilità soddisfa il *problema del tempo d'attesa* per una successione di palle  $B(x, r_n)$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_{r_n}(y, x)}{-\log \mu(B(x, r_n))} = 1.$$

In questo caso, se la dimensione locale di  $\mu$  in  $x$  è  $d_\mu(x)$  ho che

$$\tau_{r_n}(y, x) \approx r_n^{-d_\mu(x)}.$$

**Definizione 5.2.4.** In un sistema dinamico che conserva una misura  $(X, T, \mu)$  una successione decrescente di insiemi  $A_n \subset X$  si dice *Borel-Cantelli dinamica* (BC) se

$$\sum_n \mu(A_n) = \infty \quad e \quad \mu(\limsup_n T^{-n} A_n) = 1.$$

La successione  $A_n$  si dice *forte Borel-Cantelli (dinamica)* (fBC) se per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in X$  si ha che

$$\frac{\sum_{i=1}^n \chi_{T^{-n} A_n}(x)}{\sum_{i=1}^n \mu(A_n)} \rightarrow 1.$$

**Teorema 5.8.** *Sia  $(X, T, \mu)$  un sistema dinamico che conserva una misura di probabilità invariante non atomica.*

(i) *Se ogni successione decrescente di palle con lo stesso centro è BC allora per ogni fissato  $x \in X$  si ha che per quasi ogni  $y$*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(y, x)}{-\log \mu(B(x, r))} = 1.$$

(ii) *Se ogni successione decrescente di palle con lo stesso centro è BC allora per ogni fissato  $x \in X$  si ha che quasi ogni  $y$  soddisfa il problema del tempo d'attesa e*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(y, x)}{-\log \mu(B(x, r))} = 1.$$

**(i: controesempio mescolante?)** In un lavoro del 1972 Kocergin dimostra che un flusso di classe  $C^1$  privo di orbite periodiche che conserva la misura sul toro 2-dimensionale non può essere mescolante. Il risultato di Kocergin è dimostrato tramite la disuguaglianza di Denjoy-Koksma sulla circonferenza. Nella prima appendice della sua tesi Yoccoz dimostra che la disuguaglianza di Denjoy-Koksma non vale in dimensione 2.

Sfruttando lo spiraglio lasciato aperto dal lavoro di Kocergin con lo strumento preso in prestito da Yoccoz, Fayad ([Fay02]) riesce a dimostrare l'esistenza di una riparametrizzazione mescolante del flusso generato da una traslazione sul toro a tre dimensioni. L'esempio di Fayad è un 'controesempio' per molti fenomeni attesi, in particolare in [Fay06] lo si usa per mostrare come la proprietà di Borel-Cantelli dinamica e la proprietà dei bersagli monotonicamente restringentisi siano indipendenti. Si veda [ChKl01] per discussioni su queste proprietà che possono essere considerate entrambe dei rafforzamenti della condizione di mescolamento.

L'esempio di Fayad è costruito tramite vettori sul toro che verificano condizioni Diofantee, inoltre la riparametrizzazione avviene in modo che il tempo di attesa del flusso riparametrizzato è compreso in un intervallo dato dal tempo di attesa del flusso non parametrizzata moltiplicato per due costanti positive. Il sospetto che possa fornire un controesempio può venire leggendo l'articolo [GaKi06] dove si mostra una stretta connessione tra la proprietà di Borel-Cantelli e la proprietà dei bersagli restringentisi.

I tempi di attesa si possono definire anche per un flusso e se si considera la mappa al tempo 1 del flusso questa gode delle stesse proprietà ergodiche del sistema continuo. La mappa al tempo 1 della riparametrizzazione ha un tempo di attesa che può solo crescere rispetto a quella del flusso non riparametrizzato. Tutto ciò va nella direzione della possibile esistenza di un esempio mescolante in cui l'indicatore superiore del tempo di attesa sia strettamente

maggiore della dimensione del sistema. I dettagli di questo esempio vanno ancora completati e ad ogni modo pare che si riesca ad ottenere abbastanza facilmente (senza sfruttare il lavoro di Fayad) un esempio topologicamente mescolante in cui valga la disuguaglianza stretta tra indicatore di tempo di attesa e dimensione.

### 5.3 Una simulazione su Maple

Consideriamo la mappa di Hénon con i valori originali dei parametri (figura 5.1):

$$(x, y) \mapsto (1 - ax^2 + by, x) \quad a = 1.4, b = 0.3$$

Questi valori dei parametri non rientrano tra quelli per cui è stato dimostrato che si ha una misura ergodica invariante con decadimento delle correlazioni esponenziale, ma si ritiene che questo sia il comportamento che si ha anche per questi valori dei parametri.

Abbiamo utilizzato l'algoritmo usato in [CaGa06] ed abbiamo calcolato i valori di

$$\frac{\log \tau_{r_n}(X_0, X_0)}{\log(1/r_n)}, \quad \frac{\log \tau_{r_n}(Y, X_0)}{\log(1/r_n)},$$

per un certo  $X_0$  fissato (vedi figura 5.1) e per 50 punti presi a caso sull'attrattore. Quando si dice prendere i punti sull'attrattore si intende che si parte da una condizione iniziale nel bacino di attrazione e la si itera un certo numero di volte; nel nostro caso siamo partiti da  $(0, 0)$  ed abbiamo iterato 100 volte la mappa. Il punto ottenuto lo abbiamo preso come punto  $X_0$ . Abbiamo scelto la successione di raggi  $r_n = \frac{1}{n^2}$  ed abbiamo valutato  $\tau_{r_n}$  per  $n$  fino a 400. Prima di fare ciò abbiamo calcolato un numero di iterate sufficientemente alto (qualche migliaia di miliardi di iterate) di modo che i punti riuscissero a raggiungere  $X_0$  con relativa certezza a distanze inferiori di  $r_{400}$ . Queste sono le informazioni che abbiamo utilizzato per i calcoli successivi.

Uno dei vantaggi di fare i calcoli in Maple è che si possono scegliere un numero arbitrario di cifre significative ed in questo modo è possibile fare delle simulazioni 'rigorose' se si conosce in anticipo il valore del massimo esponente di Lyapunov. Non abbiamo seguito questa strada, perché questo avrebbe allungato ulteriormente i tempi di lavoro, ed abbiamo preso 'solo' 200 cifre decimali per i nostri calcoli. D'altra parte è possibile scegliere una precisione adeguata in modo che i calcoli vengano svolti in un tempo ragionevole su di un calcolatore dall'adeguata potenza. Per alcuni esempi nell'ambito dei sistemi dinamici si veda il libro di Choe ([Ch05]).

Uno degli svantaggi di fare i calcoli in Maple è che, operando in modo simbolico, l'algoritmo non è implementato in maniera efficiente e può impiegare

molto tempo su macchine non molto potenti, come quella su cui abbiamo fatto girare il programma. Ottenere i risultati che sono mostrati in figura ha richiesto circa centosettantamila secondi di computazione cioè più di quaranta ore di simulazione<sup>4</sup>. Non è stato comunque fatto nessun tentativo per cercare di migliorare e rendere più efficiente l'algoritmo.

La possibilità di fare la media su più punti, implica che l'indicatore di tempo di attesa sia numericamente più efficiente rispetto all'indicatore di ricorrenza in quanto le forti oscillazioni dovute alla natura discreta della mappa  $\tau$  sono attutite dalla media su più valori. Questo si può notare nel grafico in figura così come si può notare che curiosamente se si dovesse indovinare dalla figura chi tra tempi d'attesa e ricorrenza è il limite superiore o il limite inferiore (nel caso generale), si avrebbe buone possibilità di dare la risposta sbagliata. D'altra parte non possiamo inferire nulla da una base di dati così ristretta.

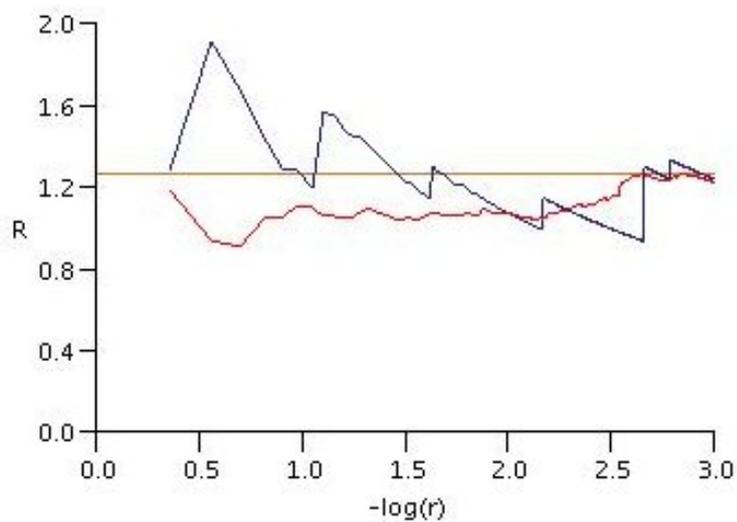
Osservando però la caoticità e l'imprevedibilità che risulta dalle oscillazioni del grafico e dal disegno dell'attrattore, si è gratificati per lo sforzo compiuto nel dimostrare certe proposizioni che a prima vista potrebbero sembrare ovvie od assurde (a seconda della propria sensibilità) e che concorrono ad individuare un poco di ordine e di equilibrio nel comportamento di fenomeni 'della natura' che possono apparire talvolta come privi di un qualunque significato.

Concludiamo questo capitolo con il paragrafo di commiato del libro di *Lezioni di Geometria Proiettiva* del matematico (e filosofo) livornese Federigo Enriques:

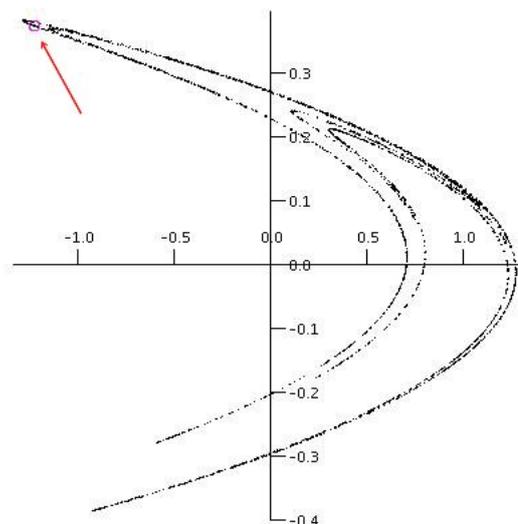
“Dalle quali applicazioni, paragonate allo svolgimento teorico della nostra scienza sorge un grande ammaestramento confortato ad ogni passo dalla storia della Matematica. I vari rami della Matematica pura ed applicata si annodano e si collegano tra loro per vie inaspettate; e le idee, che traggono origine da elementari problemi della pratica, sembrano debbano maturarsi per una lunga elaborazione di pensiero nelle regioni più alte della teoria, prima che possano discendere feconde nel campo di attività della vita.”

---

<sup>4</sup>E si è concluso poco tempo prima di dover stampare la copia per la consegna della tesi.



(a)



(b)

**Figura 5.1:** I risultati della simulazione. In 5.1(b) abbiamo riportato 10000 iterazioni della mappa a partire dall'origine (senza mostrare le prime 200 iterazioni). Nell'angolo in alto a sinistra, in un circoletto color magenta è indicato il punto  $X_0$  di cui si è stimata la dimensione locale. Nel grafico 5.1(a) sono mostrati sulle ascisse i valori di  $\log(1/r_n)$  e sulle ordinate i valori della stima sulla dimensione. La linea color oro è un valore della dimensione stimato tramite un altro algoritmo (risulta essere circa 1.27). La linea blu è l'indicatore di ricorrenza nel punto e la linea rossa è la media di 50 indicatori di tempo di attesa per 50 punti presi a caso.

# Capitolo 6

## Conclusioni

[...segue] “*Mais pouvons-nous regretter ce paradis terrestre où l’homme, semblable à la brute, était vraiment immortel puis qu’il ne savait pas qu’on doit mourir? Quand’on a goûté à la pomme, aucune souffrance ne peut en faire oublier la saveur, et on y revient toujours. Pourrait-on faire autrement?*”

*Henri Poincaré, Le Valeur de la Science*

In questo lavoro abbiamo investigato alcune questioni di base nell’ambito della teoria dei sistemi dinamici. In particolare, ci siamo concentrati sul fenomeno della *ricorrenza* che, qualora avvenga in modo non periodico (dunque comprenda l’intera scala dei tempi), è riconosciuto essere uno degli aspetti fondanti della dinamica nonlineare (si veda al riguardo la prima parte dell’Handbook edito da Katok e Hasselblatt, [HaKa02]).

Abbiamo trattato la ricorrenza come una *caratteristica di tipo dimensionale* del sistema, per usare una locuzione tratta dal fondamentale libro di Yakov Pesin ([Pe97]), anche se abbiamo limitato l’uso di strumenti tecnici allo stretto necessario (ma si può proseguire a trattare questo argomento con la generalità necessaria, come in [ACS03]). A livello di tecniche l’ambientazione generale è quella della teoria della misura, anche se vista con un occhio più probabilistico (teoria ergodica) e vivacizzata dalla presenza della dinamica.

Inoltre ritorna a confrontarsi con la misura la *distanza* o metrica che partorì originariamente il concetto stesso di misura<sup>1</sup>, grazie all’azione maieutica di Henri Lebesgue, e che fu poi giustamente accantonata per permettere al ‘figliol prodigo’ di crescere in tutta la generalità e potenza necessaria.

---

<sup>1</sup>Fatto di cui è rimasto traccia nell’aggettivazione *metrica* così frequente quando ci si intende riferire a caratteristiche legate alla misura.

Riguardo all'esposizione del materiale abbiamo privilegiato il punto di vista dei *tempi di attesa* rispetto a quello della ricorrenza<sup>2</sup> per diversi motivi.

Dal punto di vista formale, la definizione di tempo di attesa comprende la nozione di tempo di ricorrenza e risulta quindi naturale introdurre in successione; anche nell'enunciato dei teoremi, le locuzioni con i 'quasi ovunque' della ricorrenza sembrano fornire una risoluzione maggiore ad un quadro già individuato nelle sue linee generali dai tempi di attesa.

Dal punto di vista didattico i risultati sui tempi di attesa ci sono sembrati in un certo senso più 'facili', o forse solo più naturali<sup>3</sup>, rispetto a quelli sulla ricorrenza che ci pare richiedano un livello di involuzione ulteriore. Dal punto di vista tecnico, per i tempi di attesa esiste un legame chiaro e suggestivo con i lemmi di Borel-Cantelli, che sono dei risultati molto semplici ma affascinanti della teoria della probabilità.

Dal punto di vista applicativo ci siamo limitati solo a notare la possibilità dei tempi di attesa di ridurre le oscillazioni nel calcolo numerico degli indicatori, ma osserviamo che ci possono essere altri utilizzi per il concetto di tempo d'attesa. Nello studio di mappe con un qualche tipo di singolarità in un punto, ad esempio i punti di discontinuità delle mappa 'scambio di intervalli'<sup>4</sup>, i tempi di attesa forniscono una stima del tempo necessario affinché un punto generico si avvicini alla zona critica<sup>5</sup>.

D'altra parte la ricorrenza è concettualmente più importante, come abbiamo detto, e svolge un ruolo primario in altre parti della teoria dei sistemi dinamici dove i tempi di attesa risultano privi di senso.

Ricordiamo che qui noi abbiamo trattato solo di ricorrenza puntuale, mentre la ricorrenza nel senso più ampio comprende in un certo senso la

---

<sup>2</sup>Diversamente da come avviene usualmente in letteratura, dove ci si concentra di più sulla ricorrenza, nobilitata dal nome di Poincaré, mentre manca un approccio basato sui tempi di attesa, i quali tra l'altro sono spesso indicati in inglese con nomi diversi a seconda di chi ne fa uso: *waiting*, *entrance*, *hitting times*. Noi abbiamo preferito 'aspettare' piuttosto che 'ritornare'.

<sup>3</sup>O forse ciò è dovuto al fatto che abbiamo ricevuto spiegazioni più approfondite e chiare riguardo ai tempi di attesa (si guardi il frontespizio e la bibliografia per capire cosa si intende).

<sup>4</sup>Non abbiamo avuto occasione di menzionarle nel testo ma sono esempi paradigmatici del caso parabolico della dinamica. Si tratta di mappe sull'intervallo che permutano gli intervalli di una partizione, risultando quindi essere delle isometrie a tratti. Le discontinuità risultano però generare un comportamento debolmente caotico in quanto punti vicini possono allontanarsi molto velocemente se si vengono a trovare dalle parti opposte di uno di questi punti di sutura.

<sup>5</sup>L'argomento risulta essere valido anche per valutare l'impatto delle zone di non iperbolicità nella teoria non-uniformemente iperbolica. Non siamo a conoscenza se questo tipo di argomento venga utilizzato (anche implicitamente, visto che le stime dal basso sono piuttosto semplici).

---

nozione di tempi di attesa (la misura invariante che garantisce la ricorrenza viene prima del carattere ergodico di un sistema, che equivale alla finitezza dei tempi di attesa). Per fare un esempio di come la ricorrenza, slegata dalla sua versione puntuale, svolga un ruolo cardine nell'investigazione di questioni fondamentali citiamo gli importanti risultati di Lai-Sang Young sulla ricorrenza e la velocità di mescolamento ([You99b]).

Come ultima nota riguardo alla relazione tra ricorrenza e tempi di attesa, ci concediamo di parlare della vaga 'dualità' di cui abbiamo accennato nell'introduzione e riguardo alla quale abbiamo 'prove' dimostrate nella sezione 3.4. Confessiamo che in una prima fase di studio ritenevamo che questa dualità prevedesse un confronto alla pari tra ricorrenza e tempi di attesa<sup>6</sup>, mentre ora siamo più propensi ad individuare un diverso ruolo ai concetti, come se si trattasse di animali che vivono su scale spaziali diverse.

Dal punto di vista filosofico e strutturale, abbiamo fatto una scelta di anteporre alla parte sostanziale della tesi una parte più discorsiva allo scopo motivazionale. Il fatto di dover immergersi in un mare di letteratura più o meno espositiva (in questo campo difficilmente si prescinde dalla parte tecnica), è costato molti sforzi ma ha prodotto anche un grande entusiasmo ed una condizione psicologica favorevole per poter poi affrontare gli aridi, benché divertenti, studi successivi. L'impressione che se ne è ricavata è di una scienza ancora protesa a cercare di comprendere la natura così come lo era ai tempi di Henri Poincaré, con quella stessa tensione che può essere ancora trovata per esempio negli scritti di Lai-Sang Young.

Riguardo all'attribuzione dei contenuti, il lavoro è compilativo e ben documentato nel rispetto delle molteplici fonti di cui si è fatto uso. Si è comunque cercato di dare una presentazione che avesse una sua originalità ed un carattere ben definito. Per motivi di tempo non è stato possibile fare ricerche originali, anche se si sono trovati diversi spunti interessanti su cui proseguire, come quello che abbiamo indicato nella nota della sezione 5.2.

Eventuali sviluppi ulteriori partirebbero dunque da questo studio, e la spinta psicologica necessaria potrebbe essere fornita, oltre che dal piacere ed il divertimento locale del lavoro tecnico, dal fascino e dalla curiosità globale provocata dalla studio della teoria dei sistemi dinamici, alla quale riserviamo le ultime righe.

Lo studio generale della dinamica si muove — come i sistemi che vuole descrivere — da una visione geometrica motivata da concetti di stabilità, che ha portato a stravolgere le precedenti convinzioni su un determinismo

---

<sup>6</sup>Tanto che per un certo periodo, aggravato dal contemporaneo studio delle proprietà formali dei  $\limsup$  e  $\liminf$  insiemistici e numerici, l'autore ha creduto di poter trovare un supposto 'lemma di Cantel-Borelli' come parte duale mancante dal lato della ricorrenza.

ingenuo, ad un approccio probabilistico o meglio ergodico volto a determinare le caratteristiche statistiche sperimentalmente osservabili dei sistemi di cui pare la natura ci faccia un così abbondante dono.

Il giudizio a posteriori sulla validità di questo affascinante scenario potrà essere dato solo dopo un lavoro imponente e minuzioso. La storia della matematica ci insegna che a meno di collassi nel nostro modello di società<sup>7</sup>, questo sarà fatto. Ci resta solo da decidere se vogliamo essere spettatori od attori.

---

<sup>7</sup>Ma si legga il libro [RivDim] di Lucio Russo per un precedente importante del collasso di una società scientificamente evoluta.

# Appendice A

## Borel-Cantelli

Ricordo che i limiti superiori ed inferiori *insiemistici* sono così definiti per una successione di insiemi  $A_n \subset X$ :

$$\begin{aligned}\limsup_n A_n &:= \bigcap_m^\infty \bigcup_{n \geq m} A_n = \{A_n \text{ infinitamente spesso}\}; \\ \liminf_n A_n &:= \bigcup_m^\infty \bigcap_{n \geq m} A_n = \{A_n \text{ definitivamente}\}.\end{aligned}$$

Dalle definizioni segue che le loro misure soddisfano le seguenti disuguaglianze

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n) \leq \mu(A_n)$$

ed ulteriori relazioni con i corrispondenti limiti numerici (sia  $f_n$  una successione di osservabili) sono:

$$\begin{aligned}\{\limsup_n f_n(x) < c\} &\subset \liminf_n \{f_n(x) < c\}, \\ \{\liminf_n f_n(x) < c\} &\subset \limsup_n \{f_n(x) < c\}.\end{aligned}$$

Dove le formule sopra vanno intese con la notazione usata in probabilità.

Il seguente è noto come *primo lemma di Borel-Cantelli*:

**Lemma A.1.** *Se  $\sum_n \mu(A_n) < \infty$  allora  $\mu(\limsup_n A_n) = 0$ .*

**Dimostrazione.** Da  $\limsup_n A_n \subset \bigcup_{k=m}^\infty A_k$  e dalla subadditività della misura segue che  $\mu(\limsup_n A_n) \leq \sum_{k=m}^\infty \mu(A_k)$ ; il resto di una serie va a zero se la serie converge.  $\square$

Un utile corollario che useremo per dimostrare il lemma A.4 è

**Corollario A.2.** Se  $X_n$  sono variabili aleatorie con  $\sum_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty$  allora  $X_n \rightarrow 0$  quasi ovunque.

**Dimostrazione.**  $X_n \rightarrow 0$  q.o. se e solo se per ogni  $\epsilon > 0$  ho che  $\limsup\{|X_n| \geq \epsilon\}$  ha misura nulla. Ma

$$\mu\{|X_n| \geq \epsilon\} = \int_{|X_n| \geq \epsilon} 1 d\mu = \frac{1}{\epsilon} \int_{|X_n| \geq \epsilon} \epsilon d\mu \leq \frac{1}{\epsilon} \int |X_n| d\mu = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}(|X_n|)$$

e la tesi segue dal primo lemma di Borel-Cantelli.  $\square$

Il seguente è il classico *secondo lemma di Borel-Cantelli*:

**Lemma A.3.** Se  $\sum_n \mu(B_n) = \infty$  e i  $B_n$  sono indipendenti allora  $\mu(\limsup_n A_n) = 1$ .

È nota una versione più forte del secondo lemma (vedi teorema 6.6 in [Du91]):

**Lemma A.4.** Se  $\sum_n \mu(B_n) = \infty$  e i  $B_n$  sono indipendenti allora, posto  $Z_n(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{B_i}(x)$ , si ha che per quasi ogni  $x \in X$

$$\frac{Z_n(x)}{\mathbf{E}(Z_n)} \rightarrow 1$$

Se si considerano  $B_n = T^{-n}A_n$  il fatto che  $Z_n/\mathbf{E}(Z_n) \rightarrow 1$  significa che gli insiemi si distribuiscono uniformemente su tutto lo spazio.

Per ulteriori risultati e discussioni sui lemmi di Borel-Cantelli nell'ambito dei sistemi dinamici si veda (oltre alla sezione 5.2) [ChKl01], [GaKi06], [FMP07], [Ta97] e [Ga $\infty$ ].

# Appendice B

## Dimensione locale

Descriviamo alcune delle più importanti caratteristiche di tipo dimensionale. Per maggiori informazioni si veda [Pe97], [Fal90], [Bar02].

Sia  $X$  uno spazio metrico completo e separabile. Per un sottoinsieme  $Z \subset X$  ed un numero  $\alpha \geq 0$  la  $\alpha$ -misura di Hausdorff è definita da

$$m_H(Z, \alpha) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{G}} \sum_{U \in \mathcal{G}} (\text{diam } U)^\alpha,$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutti i ricoprimenti aperti  $\mathcal{G}$  di  $Z$  finiti o numerabili e con  $\text{diam } \mathcal{G} \leq \epsilon$ . La *dimensione di Hausdorff di  $Z$*  (denotata con  $\dim_H Z$ ) è definita da

$$\dim_H Z = \inf\{\alpha : m_H(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha : m_H(Z, \alpha) = \infty\}.$$

Definiamo la *dimensione box superiore ed inferiore* di  $Z$  con

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B Z &= \inf\{\alpha : \underline{r}_H(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha : \underline{r}_H(Z, \alpha) = \infty\}, \\ \overline{\dim}_B Z &= \inf\{\alpha : \overline{r}_H(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha : \overline{r}_H(Z, \alpha) = \infty\}, \end{aligned}$$

dove

$$\underline{r}_H(Z, \alpha) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{G}} \sum_{U \in \mathcal{G}} \epsilon^\alpha, \quad \overline{r}_H(Z, \alpha) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{G}} \sum_{U \in \mathcal{G}} \epsilon^\alpha,$$

e l'estremo inferiore è preso sui ricoprimenti aperti finiti o numerabili di diametro  $\epsilon$ . Si può mostrare che

$$\underline{\dim}_B Z = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \epsilon)}{\log(1/\epsilon)}, \quad \overline{\dim}_B Z = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(Z, \epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

dove  $N(Z, \epsilon)$  è il più piccolo numero di palle di raggio  $\epsilon$  necessarie per coprire  $Z$ .

È facile vedere che

$$\dim_H Z \leq \underline{\dim}_B Z \leq \overline{\dim}_B Z.$$

la coincidenza della dimensione di Hausdorff e delle dimensioni box è un fenomeno relativamente raro è capita solo in alcune situazioni ‘rigide’.

Volendo descrivere la struttura geometrica di un insieme  $Z$  invariante per un sistema dinamico  $(X, f)$  consideriamo una misura  $\mu$  supportata su  $Z$ . La sua *dimensione di Hausdorff* e *dimensione box inferiore e superiore* sono

$$\begin{aligned} \dim_H Z &= \inf\{\dim_H Z : \mu(Z) = 1\}, \\ \underline{\dim}_B \mu &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{\underline{\dim}_B Z : \mu(Z) \geq 1 - \delta\}, \\ \overline{\dim}_B \mu &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{\overline{\dim}_B Z : \mu(Z) \geq 1 - \delta\}. \end{aligned}$$

Segue dalla definizione che

$$\dim_H \mu \leq \underline{\dim}_B \mu \leq \overline{\dim}_B \mu.$$

Un'altra importante caratteristica di tipo dimensione di  $\mu$  è la *dimensione di informazione*. Data una partizione  $\xi$  di  $X$  sia  $H_\mu(\xi)$  l'entropia di  $\mu$  rispetto alla partizione  $\xi$  (vedi appendice C). Dato un numero  $\epsilon > 0$  pongo

$$H_\mu(\epsilon) = \inf\{H_\mu(\xi) : \text{diam } \xi \leq \epsilon\}$$

dove  $\text{diam } \xi$  è il diametro massimo degli elementi di una partizione. Definiamo la *dimensione di informazione superiore ed inferiore* di  $\mu$  come

$$\underline{I}(\mu) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H_\mu(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}, \quad \overline{I}(\mu) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H_\mu(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}.$$

Un potente criterio dovuto alla Young ([You82]) garantisce la coincidenza delle varie caratteristiche di tipo dimensione che abbiamo introdotto per la misura.

**Teorema B.1.** *Sia  $X$  uno spazio metrico compatto e separabile e  $\mu$  una misura di probabilità boreliana su  $X$ . Si assuma che per quasi ogni  $x \in X$*

$$\underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x) = d. \tag{B.1}$$

Allora

$$\dim_H \mu = \underline{\dim}_B \mu = \overline{\dim}_B \mu = \underline{I}(\mu) = \overline{I}(\mu) = d.$$

---

Una misura che soddisfa (B.1) è detta *esatto dimensionale*.

Il prossimo teorema è un risultato molto importante di Barreira, Pesin e Schmeling ([BPS99]) che risolve affermativamente la *congettura di Eckmann-Ruelle* ([EkRu85]). Ricordo che una misura si dice *iperbolica* se gli esponenti di Lyapunov sono quasi ovunque nonnulli.

**Teorema B.2.** *Sia  $f$  un diffeomorfismo  $C^{1+\alpha}$  su una varietà liscia riemanniana  $M$  senza bordo e sia  $\mu$  una misura ergodica invariante a supporto compatto e boreliana.*

*Se  $\mu$  è iperbolica allora è esatto dimensionale.*

Il ruolo che svolge nella teoria della dimensione è analogo a quello che svolge il teorema di Shannon-McMillan-Breiman nella teoria dell'entropia unificando, grazie al criterio della Young, diverse caratteristiche di tipo dimensione.



# Appendice C

## Entropia metrica

L'entropia metrica misura il grado di casualità o complessità di una trasformazione che conserva una misura. Diamo un modo per motivarne la definizione:

Consideriamo un esperimento  $\xi$  con  $k$  possibili risultati che si escludono a vicenda  $A_1, \dots, A_k$ . Supponiamo che  $A_i$  accada con probabilità  $p_i$ . Vogliamo misurare la quantità di informazione guadagnata dall'aver effettuato l'esperimento  $\xi$ , o equivalentemente, la quantità di incertezza che si ha quando si viene chiesto di predire il risultato di  $\xi$  prima che esso venga eseguito. Quello che cerchiamo non è veramente una funzione di  $\xi$ , bensì una funzione  $H(p_1, \dots, p_k)$  di vettori di probabilità (una  $k$ -upla  $(p_1, \dots, p_k)$  si dice un vettore di probabilità se  $0 \leq p_i \leq 1$  e  $\sum p_i = 1$ ).

Ogni ragionevole  $H$  deve avere le seguenti proprietà:

- 1) simmetria, ovvero  $H(\dots p_i \dots p_j \dots) = H(\dots p_j \dots p_i \dots)$ ;
- 2)  $H(1, 0, \dots, 0) = 0$ ;
- 3)  $H(0, p_1, \dots, p_k) = H(p_1, \dots, p_k)$ ;
- 4)  $H(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}) \geq H(p_1, \dots, p_k)$  per ogni  $(p_1, \dots, p_k)$  e vale l'uguaglianza solo se  $p_i = \frac{1}{k}$ ;
- 5)  $H \geq 0$  ed è una funzione continua nelle coordinate per ogni fissato  $k$ .

Supponiamo ora che stiamo per effettuare due esperimenti  $\xi$  e  $\eta$ , con  $A_1, \dots, A_k$  i possibili risultati di  $\xi$  con probabilità  $P(A_i) = p_i$  e siano  $B_1, \dots, B_k$  i risultati di  $\eta$ . Siano  $\pi_{ij} = P(A_i \cap B_j)$  o equivalentemente  $P(B_j|A_i) = \frac{\pi_{ij}}{p_i}$ . Allora la quantità di incertezza coinvolta nel predire il risultato di  $\eta$  sapendo che si ottenuto  $A_i$  è  $H(\frac{\pi_{i1}}{p_i}, \dots, \frac{\pi_{ik}}{p_i})$ . La nostra intuizione impone che  $H$  debba inoltre soddisfare:

$$6) H(\{\pi_{ij}\}) = H(\{p_i\}) + \sum_i H\left(\left\{\frac{\pi_{ij}}{p_i}\right\}\right).$$

**Lemma C.1.** *La funzione*

$$H(p_1, \dots, p_k) = - \sum p_i \log p_i \quad (0 \log 0 = 0)$$

è, a meno di moltiplicazione per una costante, l'unica funzione che soddisfa 1) - 6).

Ora trasferiamo la nostra intuizione alle trasformazioni che conservano una misura. L'entropia di una data misura si indica solitamente con  $h_\mu$ , ma sottointenderemo la misura  $\mu$  in quanto segue. Sia  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  uno spazio di probabilità e sia  $\xi = \{A_1, \dots, A_k\}$  e  $\eta = \{B_1, \dots, B_k\}$  partizioni misurabili di  $X$ , cioè  $A_i \in \mathcal{B}, X = \bigcup A_i, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$  (le partizioni che consideriamo saranno finite). I numeri

$$H(\xi) := - \sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i) \quad e \quad H(\eta|\xi) := \sum_i \mu(A_i) \left[ - \sum_j \mu(B_j|A_i) \log \mu(B_j|A_i) \right]$$

hanno le seguenti interpretazioni:

diciamo che l' $\xi$ -indirizzo di  $x \in X$  è  $A_i$  se  $x \in A_i$  (diremo anche  $\xi(x) := A_i$ ). Quindi  $H(\xi)$ , detta *entropia della partizione*  $\xi$ , misura la quantità di incertezza che si ha quando si è richiesti di indovinare l' $\xi$ -indirizzo di un punto scelto a caso. Analogamente,  $H(\eta|\xi)$ , la *entropia condizionale di  $\eta$  dato  $\xi$* , misura la quantità media di incertezza nell'indovinare il  $\eta$ -indirizzo di un punto preso a caso, dato il suo  $\xi$ -indirizzo.

Useremo le seguenti notazioni: se  $\xi$  e  $\eta$  sono partizioni, la loro *unione* (inglese *join*) scritta  $\xi \vee \eta$  è definita come  $\{A \cap B : A \in \xi, B \in \eta\}$ . Se  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sono partizioni, scriviamo  $\bigvee_1^n \xi_i$  ( $\xi^n := \bigvee_0^{n-1} T^{-i}\xi$ ).  $T^{-1}\xi$  è la partizione  $\{T^{-1}A, A \in \xi\}$  e  $\xi < \eta$  significa che  $\eta$  è più fine di  $\xi$ , ovvero ogni  $B \in \eta$  è contenuto in un elemento di  $\xi$ .

Sia  $T : X \rightarrow X$  una trasformazione che conserva una misura  $\mu$  e sia  $\xi$  una partizione di  $X$ . Definiamo

$$h(T; \xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \quad e \quad h(T) := \sup_{\xi} h(T; \xi).$$

Si verifica che  $h(T; \xi)$  può essere realizzato anche tramite  $\lim_n H(\xi | \bigvee_1^n T^{-i}\xi)$ .

Nella definizione di  $h(T)$  si è supposti prendere il sup su tutte le partizioni. Ciò non è né pratico, né necessario. Per enunciare il prossimo lemma abbiamo bisogno di un paio di definizioni. Confonderemo una partizione  $\xi$  con la  $\sigma$ -algebra generata da  $\xi$  e se  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , sono  $\sigma$ -algebre allora  $\bigvee_{i=1}^\infty \xi_i$  denota la

---

più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene tutte le  $\xi_i$ . Due  $\sigma$ -algre  $\xi$  e  $\eta$  sono dette *uguali mod 0* ( $\xi \doteq \eta$ ), se per ogni  $A \in \xi$  esiste un  $B \in \eta$  tale che  $\mu(A \Delta B) = 0$  e viceversa. Una partizione  $\xi$  si dirà generatrice se  $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^{-i}\xi \doteq \mathcal{B}$ , per  $T$  invertibile,  $\bigvee_0^{\infty} T^{-i}\xi \doteq \mathcal{B}$ , per  $T$  non invertibile.

**Lemma C.2.** *Sia  $\xi_n$  una successione di partizione tali che  $\xi_1 < \xi_2 < \dots$  e  $\bigvee_{i=1}^{\infty} \xi_i \doteq \mathcal{B}$ . Allora  $\lim_n h(T; \xi_n) = h(T)$ . Se  $\xi$  è generatrice allora  $h(T; \xi) = h(T)$ .*

Questo lemma ci permette di calcolare, per esempio, l'entropia delle rotazioni (è nulla) e quella degli shift di Bernoulli di tipo  $(p_1, \dots, p_k)$  (è  $-\sum p_i \log p_i$ ).

Il concetto di entropia risale a Shannon<sup>1</sup> nel suo lavoro sulla teoria dell'informazione. L'entropia come misura di casualità per i sistemi dinamici fu introdotta da Kolmogorov e Sinai nei tardi anni '50. Ci sono diverse definizioni di entropia (vanno sotto i nomi di entropia di Kolmogorov e Sinai, Katok, Brin e Katok, Pesin) ed il prossimo teorema ne fornisce un'altra; inoltre il ruolo che esso svolge nella teoria dell'entropia è di unificare tutte queste definizioni mostrando che coincidono (si veda [Pe97]).

**Teorema C.3.** *(Shannon-McMillan-Breiman) Sia  $(X, T, \mu)$  un sistema dinamico che conserva una misura di probabilità e sia  $\xi$  una partizione finita. Allora per quasi ogni  $x$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\xi^n(x)) = h(T; \xi).$$

Infine enunciamo il teorema di Ornstein-Weiss ([OrWe93]) che rappresenta uno dei primi risultati della ricorrenza quantitativa ed è un analogo, nel caso della dimensione, del teorema B e delle sue varianti.

**Teorema C.4.** *Sia  $(X, T, \mu)$  un sistema dinamico che conserva una misura di probabilità e sia  $\xi$  una partizione misurabile di  $X$ . Allora per quasi ogni  $x$*

$$R(x) := \frac{\log \tau_{\xi^n(x)}(x)}{n} = h(T, \xi).$$

Per un risultato analogo nel caso dei tempi di attesa (ma con ipotesi molto più forti) si veda [Sh93].

La seguente presentazione è dovuta essenzialmente a [You95], si veda anche [Pet83] per gli sviluppi precedenti al teorema di Ornstein-Weiss e [Bar02] per le connessioni con la dimensione.

---

<sup>1</sup>Pare che sia von Neumann ad aver suggerito a Shannon di prendere il termine entropia dalla termodinamica, visto che nessuno sapeva quale fosse il suo vero significato.



# Bibliografia

- [AbGa01] M. Abadi e A. Galves, *Inequalities for the occurrence times of rare events in mixing processes. The state of the art*, Markov Proc. Relat. Fields. **7** (2001), 97-112.
- [ACS03] V. Afraimovich, J.-R. Chazottes, B. Saussol, *Pointwise dimensions for Poincaré recurrences associated with maps and special flows*, Discrete Cont. Dyn. Syst. **A 9** (2003), 263–280.
- [ASY96] K. Alligood, T. Sauer e J. Yorke, *Chaos*, Springer (1996).
- [APPV $\infty$ ] V. Araujo, M. J. Pacifico, E. R. Pijals e M. Viana, *Singular hyperbolic attractors are chaotic*, preprint IMPA.
- [Arn90] V. I. Arnold, *Newton e Hooke, Barrow e Huygens*, Birkhauser (1990).
- [Bal99] V. Baladi, *Decay of correlations*, in Smooth Ergodic Theory and its Applications, Proc. Symp. Pure Mathematics **69** (1999), 297–325.
- [Bal00] V. Baladi, *Positive transfer operators and decay of correlations*, World Scientific (2000).
- [PerBak] P. Bak, *How nature works*, Oxford University Press (1997).
- [Bar02] L. Barreira, *Hyperbolicity and recurrence in dynamical systems: a survey of recent results*, ResenHas IME-USP **5** (2002), 171–230.
- [Bar05] L. Barreira, *Poincaré recurrence: old and new*, in XIVth International Congress on Math. Physics, World Scientific (2005).
- [BPS99] L. Barreira, Y. Pesin e J. Schmeling, *Dimension and product structure of hyperbolic measures*, Annals of Mathematics **149** (1999), 755–783.

- [BaSa01] L. Barreira e B. Saussol, *Hausdorff dimension of measures via Poincaré recurrence*, Commun. Math. Phys. **219** (2001), 443–463.
- [BaSa02] L. Barreira, B. Saussol, *Product structure of Poincaré recurrence*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **22** (2002), 33–61.
- [B-G97] J. Barrow-Green, *Poincaré and the three body problem*, AMS/LMS History of Mathematics **11** (1997).
- [BKS91] T. Bedford, M. Keane, C. Series ed., *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*, Oxford University Press (1991).
- [BeCa91] M. Benedicks e L. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. Math. **133** (1991), 73–169.
- [BeYo93] M. Benedicks e L.-S. Young, *Sinai-Bowen-Ruelle measure for certain Hénon maps*, Invent. Math. **112** (1993), 541–576.
- [Bil65] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, John Wiley and Sons (1965), New York.
- [Bir31] G. D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17**, 656–60.
- [Bir42] G. D. Birkhoff, *What is the Ergodic Theorem?*, Am. Math. Monthly **49** (1942), 222–226.
- [Bo1898] L. Boltzmann *Vorlesungen über Gastheorie*, in ‘Wissenschaftliche abhandlungen’ vol. II (1898).
- [BGI04] C. Bonanno, S. Galatolo e S. Isola, *Recurrence and algorithmic information*, Nonlinearity **17** (2004), 1057–1074.
- [Bos93] M. Boshernitzan, *Quantitative recurrence results*, Invent. Math. **113** (1993), 617–631.
- [BSTV03] H. Bruin, B. Saussol, S. Troubetzkoy e S. Vaienti, *Return time statistics via inducing*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **23** (2003), 991–1013.
- [Br66] S. G. Brush, *Kinetic Theory*, Pergamon Press (1966), Oxford.
- [Br80] S. G. Brush, *Poincaré and cosmic evolution*, Physics Today **33**, 42–49.
- [CaGa06] T. Carletti, S. Galatolo, *Numerical Estimates of dimension by recurrence and waiting time*, Physica A **364** (2006), 120–128.

- 
- [Cas57] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine approximation*, Cambridge University Press (1957).
- [ChKl01] N. Chernov e D. Kleinbock, *Dynamical Borel-Cantelli lemmas for Gibbs measures*, israel J. Math. **122** (2001), 1–27.
- [Ch05] G. H. Choe, *Computational ergodic theory*, Springer-Verlag (2005).
- [ChSe01] G. H. Choe e B. K. Seo, *Recurrence speed of the multiples of an irrational number*, Proc. Japan Acad. **77** (2001), 134–137.
- [Coe00] Z. Coelho, *Asymptotic laws for symbolic dynamical systems*, in Topics in Symbolic Dynamics and Applications, F. Blanchard, A. Maass e A. Nogueira ed., LMS Lecture Notes **279** (2000), 123–165.
- [Cv89] P. Cvitanovic, *Universality in Chaos*, Taylor & Francis (1989).
- [CAMTV] P. Cvitanovic, R. Artuso, R. Manieri, G. Tanner e G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum*, ChaosBook.org, Niels Bohr Institute (2005), Copenhagen.
- [DoLa $\infty$ ] T. Downarowicz e Y. Lacroix, *The law of series*, preprint.
- [Du91] R. Durrett, *Probability: theory and examples*, Wadsworth & Brooks/Cole (1991).
- [EkRu85] J.-P. Eckmann e D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. **57** (1985), 617–656.
- [Eh59] P. Ehrenfest, T. Ehrenfest, *The conceptual foundations of the statistical approach in Mechanics*, Cornell University Press (1959).
- [Enc04] A. Scott ed., *Encyclopedia of nonlinear science*, Routledge (2004).
- [Fal90] K. Falconer, *Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons (1990).
- [Fay02] B. Fayad, *Analytic mixing reparametrizations of irrational flows*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **22** (2002), 437–468.
- [Fay06] B. Fayad, *Mixing in the absence of the shrinking target property*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), 829–838.
- [Fay01] B. Fayad, *Polynomial decay of correlations for a class of smooth flows on the two torus*, Bull. Soc. Math. Fr. **129** (2001), 487–503.

- [FMP07] J.L. Fernandez, M.V. Melian e D. Pestana, *Quantitative mixing results and inner functions*, Math. Ann. **337** (2007), 233–251.
- [Fu81] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press (1981), Princeton.
- [Ga05] S. Galatolo, *Dimension via waiting time and recurrence*, Math. Res. Lett. **12** (2005), 377–386.
- [Ga06] S. Galatolo, *Hitting time and dimension in Axiom A systems, interval exchanges and an application to Birkoff sums*, Journal of Stat. Phys. **123** (2006), 111–124.
- [Ga $\infty$ ] S. Galatolo, *Dimension and waiting time in rapidly mixing systems*, preprint, Arxiv: math.DS/0611911.
- [GaKi06] S. Galatolo, D. H. Kim, *The dynamical Borel-Cantelli lemma and the waiting time problems*, preprint, Arxiv: math.DS/0610213.
- [Gall81] G. Gallavotti, *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto*, Pitagora Editrice (1981) Bologna.
- [Go93] D. L. Goroff, *Henri Poincaré and the birth of chaos theory: An introduction to the English translation of Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, New Methods of Celestial Mechanics*, American Institute of Physics Press (1993).
- [GH90] J. Guckenheimer e P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1990).
- [GYW06] J. Guckenheimer, L.-S. Young e M. Weschelberger, *Chaotic attractors of relaxation oscillators*, Nonlinearity **19** (2006), 701–720.
- [HaJe04] T. C. Halsey e M. H. Jensen, *Hurricanes and butterflies*, Nature **428** (2004), 127–128.
- [Hao84] B.-L. Hao, *Chaos I*, World Scientific Publishing (1984).
- [HaKa02] B. Hasselblatt e A. Katok ed., *Handbook of Dynamical Systems* (2002).
- [HLV05] N. Haydn, Y. Lacroix e S. Vaienti, *Hitting and return times in ergodic dynamical systems*, Ann. Probab. **33** (2005), 2043–2050.
- [HLMV02] N. Haydn, J. Luevano, G. Mantica e S. Vaienti, *Multifractal properties of return time statistics*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002).

- 
- [Hé76] M. Hénon, *A two dimensional mapping with a strange attractor*, Comm. Math. Phys. **50** (1976), 69–77.
- [Hi93] M. Hirata, *Poisson law for Axiom-A diffeomorphisms*, Ergod. Theor. Dynam. Syst. **13** (1993), 533–556.
- [HSV 99] M. Hirata, B. Saussol e S. Vaienti, *Statistics of return times: a general framework and new applications*, Comm. Math. Phys. **206** (1999), 33–35.
- [He79] M. R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. I.H.E.S. **49** (1979), 5–234.
- [Ho90] P. Holmes, *Poincaré, celestial mechanics, dynamical systems theory and “chaos”*, Physics Reports **193** (1990), 137–163.
- [Is] S. Isola, *Teoria ergodica*, lecture notes <https://unicam.it/stefano.isola/materiale.html>.
- [Ja81] M. Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Commun. Math. Phys. **81** (1981), 39–88.
- [Je98] H.J. Jensen, *Self-organized criticalities: emergent complex behavior in physical and biological systems*, Cambridge University Press (1998).
- [Jo05] J. Jost, *Dynamical Systems*, Springer (2005), Berlin.
- [Kac47] M. Kac, *On the notion of recurrence in discrete stochastic processes*, Bull. Am. Math. Soc. **53** (1947), 1002–10.
- [KaHa95] A. Katok e B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press (1995).
- [KePe06] M. Keane e K. Petersen, *Easy and nearly simultaneous proofs of the Ergodic Theorem and Maximal Ergodic Theorem*, IMS Lecture Notes — Monograph Series **48** (2006), 248–251.
- [Kh] A. Y. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover Publications, New York.
- [KiSe03] D.H. Kim e B.K. Seo, *The waiting time for irrational rotations*, Nonlinearity **16** (2003), 1861–1868.
- [KuLa05] M. Kupsa e Y. Lacroix, *Asymptotics for hitting times*, Ann. Probab. **33** (2005), 610–619.

- [La02] Y. Lacroix, *Possible limit laws for entrance times of an ergodic aperiodic dynamical system*, Israel J. Math. **132** (2002), 253–264.
- [Li82] D. A. Lind, *Dynamical properties of quasi-hyperbolic toral automorphism*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **2** (1982), 49–68.
- [Liv95] C. Liverani, *Decay of correlations*, Annals of Mathematics **142** (1995), 239–301.
- [Lo63] E. N. Lorenz, *Deterministic non periodic flow*, J. Atmosph. Sci. **20** (1963), 130–141.
- [Lu04] S. Luzzatto, *Mixing and decay of correlations in nonuniformly expanding maps: a survey of recent results*, preprint, Arxiv: math.DS/0301319.
- [Ma74] G. W. Mackey, *Ergodic theory and its significance for statistical mechanics and probability theory*, Adv. in Math. **12** (1974), 178–268
- [Ma80] G. W. Mackey, *Harmonic analysis as the exploitation of symmetry — A historical survey*, Bull. AMS **3** (1980), 543–698.
- [May76] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature **261** (1976), 459.
- [Mi85] J. W. Milnor, *On the concept of attractor*, Comm. Math. Phys. **99** (1985), 177–195.
- [Mi06] J. W. Milnor, *Attractor*, Scholarpedia (2006), p.4862.
- [Mis81] M. Misiurewicz, *Absolutely continues invariant measures for certain maps of an interval*, Publ. Math. IHES. **53** (1981), 17–51.
- [Ni63] I. Niven, *Diophantine Approximations*, Interscience Publishers (1963).
- [OrWe93] D. Ornstein e B. Weiss, *Entropy and data compression*, IEEE Trans. Inform. Th. **39** (1993), 78–83.
- [Pa81] W. Parry, *Topics in ergodic theory*, Cambridge University Press (1981).
- [Pe97] Y. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems*, Chicago lectures in Mathematics (1997).

- 
- [Pet] K. Petersen, *Attractors and attracting measures*, lecture notes  
<http://www.math.unc.edu/Faculty/petersen/>
- [Pet83] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge University Press (1983).
- [Po1890] H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Math. **13** (1890), 1–270.
- [PoYu04] M. Pollicott e M. Yuri, *Dynamical systems and ergodic theory*, Cambridge University Press (2004).
- [Ru78] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Addison-Wesley (1978), Reading MA.
- [Ru06] D. Ruelle, *What is... a Strange Attractor?*, Notices of AMS **53** (2006), 764–765.
- [RuTa71] D. Ruelle e F. Takens, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys. **20** (1971), 167–192.
- [RivDim] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli (1996).
- [STV02] B. Saussol, S. Troubetzkoy e S. Vaienti, *Recurrence, dimensions and Lyapunov exponents*, J. Stat. Phys. **106** (2002), 623–634.
- [Sa06] B. Saussol, *Recurrence rate in rapidly mixing dynamical systems*, Discrete Cont. Dyn. Syst. **15** (2006), 259–267.
- [Sc80] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Mathematics, Springer (1980).
- [Sh96] P. C. Shields, *Ergodic theory of discrete sample path*, Am. Math. Soc. (1996).
- [Sh93] P. C. Shields, *Waiting times: positive and negative results on the Wyner-Ziv problem*, J. Theoret. Probab. **6** (1993), 499–519.
- [Shu05] M. Shub, *What is... a Horseshoe?*, Notices of AMS **52** (2005), 516–517.
- [Si76] Ya. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton University Press (1976), Princeton.
- [Sm67] S. Smale, *Differentiable dynamical systems* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.

- [Sm98] S. Smale, *Finding a horseshoe on the beaches of Rio*, Math. Intelligencer **20** (1998), 39–44.
- [Sp03] J. C. Sprott, *Chaos and time-series analysis*, Oxford University Press (2003).
- [St94] S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and Chaos*, Perseus Books (1994).
- [Sz96] D. Szasz, *Boltzmann's Ergodic Hypothesis, a conjecture for centuries?*, Studia Sci. Math. Hung. **31** (1996), 299–322.
- [Ta97] D. Tasche, *On the second Borel-Cantelli lemma for strongly mixing sequences of events*, J. Appl. Probab. **34** (1997), 381–394.
- [Th83] M. Thaler, *Transformations on  $[0, 1]$  with infinite invariant measures*, Israel J. Math. **46** (1983), 67–96.
- [Tu99] W. Tucker, *The Lorenz attractor exists*, C. R. Acad. Sci. Paris **328** (1999), 1197–1202.
- [Vsdds] M. Viana, *Stochastic dynamics of deterministic systems*, lecture notes <http://w3.impa.br/~viana/#articles>.
- [Vi98] M. Viana, *Dynamics: a probabilistic and geometric perspective*, in Procs. ICM 1998 Berlin, Documenta Mathematica (1998), 557–578.
- [Vi00] M. Viana, *What's new on Lorenz strange attractors?*, Math. Intelligencer **22** (2000), 6–19.
- [Vi05] C. Bonatti, L. Diaz e M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: a Global Geometric and Probabilistic Approach*, Springer (2005), Berlin.
- [vN32] J. v. Neumann, *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **18** (1932), 70–82.
- [Wa83] P. Walters, *An introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag (1983), New York.
- [WY01] Q. Wang e L.-S. Young, *Strange attractors with one direction of instability*, Commun. Math. Phys. **218** (2001), 1–97.
- [WY02] Q. Wang e L.-S. Young, *From invariant curves to strange attractors*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 275–304.

- 
- [WY03] Q. Wang e L.-S. Young, *Strange attractors in periodically-kicked limit cycles and Hopf bifurcations*, Commun. Math. Phys. **240** (2003), 509–529.
- [WY $\infty$ ] Q. Wang e L.-S. Young, *Toward a theory of rank one attractors*, in pubblicazione su Ann. Math..
- [Wey16] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **77** (1916), 313–352.
- [Wr61] F. Wright, *Mean least recurrence time*, J. London Math. Soc. **36** (1961), 382–384.
- [Yoc92] J.-C. Yoccoz, *An Introduction to Small Divisors Problem*, in From Number Theory to Physics, M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck, e C. Itzykson ed., Springer (1992), 659–679.
- [You82] L.-S. Young, *Dimension, entropy and Lyapunov exponents*, Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1982), 109–124.
- [You98a] L.-S. Young, *Developments in Chaotic Dynamics*, AMS Notices (1998).
- [You95] L.-S. Young, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems*, Real and Complex Dynamical Systems (B. Branner e P. Hjorth ed.), Kluwer Acad. Press (1995).
- [You99a] L.-S. Young, *Geometric and ergodic theory of hyperbolic dynamical systems*, Lecture series in Current Developments in Mathematics 1998 Harvard-MIT, International Press (1999).
- [You99b] L.-S. Young, *Recurrence times and rates of mixing*, Israel J Math. **110** (1999), 153–188.
- [You98b] L.-S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Annals of Math. (1998), 585–650.
- [You02] L.-S. Young, *What are SRB measures, and which dynamical systems have them?*, J. Stat. Phys. **108** (2002), 733–754.



Ringrazio molto il professor Gianfausto Dell'Antonio per la sua disponibilità. Grazie moltissimo a Stefano per l'attenzione, la competenza e l'amicizia con cui mi ha guidato. Ringrazio i miei genitori per l'affetto ed il supporto costante, per i silenzi e le parole e per molto altro. Grazie a Camilla per gli incoraggiamenti a distanza.

Ringrazio molto i professori della Sissa e dell'università di Trieste per la professionalità e per l'ambiente stimolante e gentile in cui ho passato questi due anni e mezzo. Un grazie di cuore alla professoressa Barbara Fantechi per l'entusiasmo con cui mi ha accolto prima e l'affetto con cui mi ha incoraggiato dopo, oltre alla disponibilità del mentore. Un ringraziamento particolare al professor Antonio De Simone per le opportunità che mi ha offerto, e che purtroppo non ho fatto fruttare.

Grazie agli amici e compagni di fatiche Laura, Giuliano, Andrea, Cecco. A Nicola, ai bei momenti di studio insieme ed all'affetto di poi, un grazie ed un abbraccio. Grazie a Marco, Alejo e Roberta per essermi stati vicini nei momenti difficili, e non solo. Un ringraziamento particolare al grande Alessandro, per essere stato un tifoso ed un amico fuori dall'ordinario. In rappresentanza dei dottorandi della Sissa ringrazio Lucia, anche per l'aiuto prodigatomi durante la seconda tesi. In quanto rappresentante (vero) della Laurea Specialistica ringrazio Frank.

Ringrazio Caterina e la nostra casa in via Commerciale, insieme a Fabio ed alle sedute letterario-psicanalitiche di Simone. Ringrazio la casa pisana, la compagna di alienazione Mariela, Franco, Fabio ed anche l'imperscrutabile Drogo. Grazie alle molte altre case dove sono stato ospitato in questo ultimo periodo agitato.

Ringrazio gli amici più cari, tutti. Grazie Nicolò per tante cose, tra cui diverse sfere di energia positiva. Grazie Raphael per molte molte cose, davvero tante: 'Te sì'. Grazie Claudia per i puzzle, e non solo. Grazie a Martino e Nicole, a Montemagno ed all'India. Grazie a Paolo, alla Vineria di Piazza, al Jackson Pollock, alla corte di Calci e alle cuoche di Nonna Rosa.

Ringrazio Trieste, i suoi tramonti e le sue erte; grazie alla bora ed al carso, alla Napoleonica, la costiera e la Val Rosandra. Ringrazio Edoardo 'Gion' per le scorribande nelle alpi Giulie (e non solo), e tutti i compagni di scalate. Grazie alla gentile roccia della Torre Palizza, del Montasio, del Triglav, . . . Ringrazio per le serate di festa gli amici fisici, grazie a Michele per essere Mink, grazie a Lorenzo per essere Las. Ringrazio un altro Lorenzo per le immersioni in Istria. Ringrazio Fairwind e l'adriatico mare.

Ringrazio gli amici di Trieste, Pisa, Firenze, Milano, Lipsia, Parigi, Berlino, . . . per i bei momenti passati assieme in questi ultimi anni. Grazie a quelli che non compaiono in questi righe ma sono ben presenti nel mio ani-

mo. G-razie. Grazie Luca, Amina, Alessia, Alessandro, Riccardo. Grazie Gianpaolo. Grazie Ferruccio. Ringrazio gli amici di teatro.

Grazie Ezio. Un abbraccio, a te che sei lontano. Un sorriso, grande perché tu lo possa vedere. Un saluto.

Infine ringrazio infinitamente Francesca per una quantità non numerabile di motivi, ma soprattutto perché esiste ed è unica.