Mathematik für Naturwissenschaftler I

LMU München – Wintersemester 2014/2015

HAUSAUFGABENBLATT – WOCHE 09 (1.12.2014)

Die Hausaufgaben sind nicht teil der Endnote.
Die Lösungen werden in dem Tutorium der nächsten Woche besprochen.

Aufgabe 33. Berechne, falls möglich, die Grenzwerte $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, mit:

$$\text{(i)}\ \ f(x) \ = \ \frac{2^x}{x^2}\,, \qquad \text{(ii)}\ \ f(x) \ = \ \frac{\sin x}{x}\,, \qquad \text{(iii)}\ \ f(x) \ = \ x\sin x\,, \qquad \text{(iv)}\ \ f(x) \ = \ \frac{2014\,x^2+1}{2015\,x}\,.$$

Aufgabe 34.

(i) Sei x_0 fixiert und die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ gegeben. Bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to x_0} g(x)$ der folgenden Funktion

$$g(x) \ = \ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}\,.$$

(ii) Zeige, dass f auf ganz $(0,+\infty)$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitungsfunktion f'.

Aufgabe 35. Zaige, dass die Funktionen $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, für alle reellen Zahlen x differenzierbar sind, mit

$$(\sin x)' \ = \ \cos x\,, \qquad (\cos x)' \ = \ -\sin x\,.$$

Aufgabe 36. Betrachte die Funktionen

$$f(x) \ = \ \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leqslant -1 \\ x & \text{für } |x| \leqslant 1 \\ x^2 & \text{für } x \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) \ = \ \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & \text{für } x \leqslant -1 \\ x & \text{für } |x| \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} & \text{für } x \geqslant 1 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Zaige, dass sowohl f als auch g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

(ii) Mann untersuche f und g auf ihre Differenzierbarkeit hin, und mann bestimme, falls existent, die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.