Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen.

Von

Ernst Hellinger und **Otto Toeplitz** in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 28. Juli 1906.

Es hat sich in der Algebra der gemeinen komplexen Größen vielfach als nützlich herausgestellt, neben den komplexen Größen selbst auch noch quadratische Systeme von solchen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) = A,$$

sog. Matrizen, als Objekte der Rechnung einzuführen, und zwar in der folgenden Weise: Unter der Summe zweier Matrizen (a_{ik}), (b_{ik}) versteht man die Matrix $(a_{ik}+b_{ik})$, unter dem Produkt von (a_{ik}) und (b_{ik}) die Matrix $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha k}\right)$; alsdann kann man die elementaren Rechenregeln der Addition und Multiplikation leicht beweisen, nur gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht. n, die Reihenzahl der Matrizen, ist hierbei eine willkürlich, aber fest gewählte ganze Zahl.

Neuere Untersuchungen aus dem Gebiete der Integralgleichungen und insbesondere die kürzlich von Herrn D. Hilbert gegebene Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Variabeln[1]) haben nun die Aussicht eröffnet, daß ein ähnlicher Kalkül mit unendlichen Matrizen ($n = \infty$) sich für manche Gebiete der Analysis in ähnlicher Art als nützlich erweisen könnte.

Unter einer unendlichen Matrix verstehen wir ein quadratisches, nach rechts und unten unbegrenzt ausgedehntes System

---

1) Diese Nachr. 1906, S. 157 ff.

komplexer Größen

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (a_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \dots),$$

eine sogenannte Doppelfolge. Man kann von solchen Systemen sprechen, ohne über ihre Elemente irgend welche Konvergenzeigenschaften vorauszusetzen; man kann auch die Summe $(a_{ik}+b_{ik})$ zweier solcher Matrizen stets bilden; aber man kann nicht ohne weiteres von dem Produkte $\left(\sum_{\alpha=1,2,\dots} a_{i\alpha} b_{\alpha k}\right)$ reden, da die unendliche Reihe $\sum_{\alpha} a_{i\alpha} b_{\alpha k}$ nicht zu konvergieren braucht, wenn man die a_{ik}, b_{ik} ganz willkürlich wählt. Danach ist es ausgeschlossen, in strenger Analogie mit dem Verfahren bei endlichem n die Gesamtheit aller unendlichen Matrizen als Objekte der Rechnung aufzufassen.

So entsteht die Aufgabe, aus der Gesamtheit aller unendlichen Matrizen eine möglichst weite Gesamtheit herauszugreifen, in der sich die elementaren Rechenoperationen etablieren lassen, d. h. das allgemeinste System von unendlichen Matrizen zu umgrenzen, das den folgenden Forderungen genügt:

I. Die Summe zweier Matrizen des Systems gehört wiederum dem Systeme an.

II. Das Produkt zweier Matrizen des Systems existiert in dem Sinne, daß $\sum_{\alpha} a_{i\alpha} b_{\alpha k}$ absolut [1]) konvergiert, und gehört wieder dem Systeme an.

Vollständigkeitsforderung $\mathfrak{V}$(I, II): Das System ist nicht als Teil in einem anderen Systeme unendlicher Matrizen enthalten, welches ebenfalls den Forderungen I, II genügt.

Bei der Behandlung dieser Aufgabe sind wir unter anderem zu folgenden Resultaten gelangt. Ein gewisses System unendlicher Matrizen, welches in der erwähnten Mitteilung von Herrn Hilbert eine Rolle spielt, genügt allen drei Forderungen; es ist dies das System derjenigen Matrizen (a_{ik}), deren zugehörige Bilinearformen $\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k$ absolut konvergieren und dem Betrage nach unter einer von den x_i, y_k unabhängigen Grenze M bleiben für alle reellen positiven $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$, deren Quadratsummen $\sum_i x_i^2$, $\sum_k y_k^2$ konvergieren und gleich 1 sind [2]); dieses System möge als das System $\mathfrak{H}$ bezeichnet werden.

1) Ohne eine derartige Forderung kann man das associative Gesetz der Multiplikation nicht beweisen.

2) In Hilbertscher Benennung: beschränkte Formen.

Der Beweis, daß $\mathfrak{H}$ den drei aufgestellten Forderungen genügt, stützt sich auf die folgenden beiden Konvergenzsätze, die wohl auch an sich Interesse bieten:

Hilfssatz 1. Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge reeller positiver Größen und konvergiert die unendliche Reihe (Linearform) $\sum_i a_i x_i$ für alle diejenigen reellen positiven $x_1, x_2, \ldots$, deren Quadratsumme $\sum_i x_i^2$ konvergiert und gleich 1 ist, so konvergiert auch $\sum_i a_i^2$, und es ist für alle jene x_i:

$$\sum_i a_i x_i \leqq \sqrt{\sum_i a_i^2}.$$

Hilfssatz 2. Sei eine unendliche Doppelfolge reeller positiver Größen vorgelegt, die der Symmetriebedingung $a_{ik} = a_{ki}$ genügt, und konvergiert die quadratische Form $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ für alle reellen positiven Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme $\sum_i x_i^2 = 1$, so gibt es eine reelle positive Zahl M derart, daß für alle jene Wertsysteme x_i der Wert der unendlichen quadratischen Form

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \leqq M$$

ist.

Man kann diese Sätze auch kurz so aussprechen: Hat eine lineare oder quadratische Form der unendlichvielen Variablen für jedes der Bedingung $\sum_i x_i^2 \leqq 1$ genügende Wertsystem einen endlichen Wert, so bleibt sie in dem ganzen Gebiete $\sum_i x_i^2 \leqq 1$ unter einer endlichen Grenze (ist „beschränkt“).

Daß $\mathfrak{H}$ den Forderungen I, II genügt, folgt, wie auch in der Note von Herrn Hilbert enthalten, leicht aus den dort benutzten einfachen Ungleichungen [1]). Schwieriger ist der Beweis der Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$, der sich auf den tiefer liegenden Hilfssatz 2 stützt.

Es hat sich ferner herausgestellt, daß $\mathfrak{H}$, obwohl es der Vollständigkeitsforderung genügt, nicht alle Systeme unendlicher Matrizen als Teilsysteme enthält, welche den Forderungen I, II genügen. Man erhält ein anderes, ebenfalls der Vollständigkeitsforderung genügendes System aus den Matrizen A von $\mathfrak{H}$, indem man $P^{-1}AP$ bildet, unter P, P^{-1} etwa die Matrizen

1) L. c. S. 176 ff. — Bei Herrn Hilbert entspricht dem Produkte der Matrizen (a_{ik}), (b_{ik}) die Faltung der zugehörigen Bilinearformen

$$A(x, .)\, B(., y) = \sum_{i,k,\alpha} a_{i\alpha} b_{\alpha k} x_i y_k.$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & . \\ 0, & 0, & \frac{1}{3}, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & 2, & 0, & . \\ 0, & 0, & 3, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

verstanden. Indem man P variiert, gewinnt man eine große Menge solcher zu $\mathfrak{H}$ holoedrisch-isomorpher, von $\mathfrak{H}$ verschiedener Systeme, die alle ebenfalls I, II, $\mathfrak{B}$(I, II) genügen.

Man kann $\mathfrak{H}$ unter der Gesamtheit dieser zu $\mathfrak{H}$ isomorphen Systeme **eindeutig** durch die weitere Forderung charakterisieren:

III. Ist (a_{ik}) eine Matrix des Systemes, so gehört die „konjugierte Matrix“

$$A' = (a_{ki}) = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

gleichfalls dem Systeme an.

Aber mit diesen zu $\mathfrak{H}$ isomorphen Systemen ist die Gesamtheit der Systeme, die I, II, $\mathfrak{B}$(I, II) genügen, noch nicht erschöpft. Das System $\mathfrak{A}$ aller unendlichen Matrizen, in deren jeder Kolonne immer nur eine endliche Anzahl von Null verschiedener Elemente steht (die aber mit dem Kolonnenindex beliebig wachsen kann), und deren Elemente im übrigen keiner Konvergenzbedingung unterworfen sind, genügt ebenfalls den drei Forderungen; man kann beweisen, daß es zu $\mathfrak{H}$ nicht holoedrisch-isomorph ist. Ebenso zeigt die Gesamtheit $\mathfrak{B}$ aller unendlichen Matrizen, deren jede Zeile sowohl als Kolonne immer nur endlich viele von Null verschiedene Elemente aufweist, die wiederum keiner Konvergenzeinschränkung unterworfen sind, daß $\mathfrak{H}$ nicht das einzige System ist, welches I, II, III und $\mathfrak{B}$(I, II, III) genügt, d. h. in keinem größeren, I, II, III genügenden Systeme enthalten ist. Vielmehr existiert noch eine große Fülle derartiger Systeme.

Wir behalten es einer ausführlichen Veröffentlichung vor, über alle diese verschiedenen Systeme und ihre Bedeutung für die Analysis eine Uebersicht zu geben. Auch von der Division wird dort noch zu handeln sein. Bei ihr tritt schon im Systeme $\mathfrak{H}$ gegenüber den endlichen Matrizen als neu die Möglichkeit auf, daß zu einer (unsymmetrischen) Matrix unendlich viele Reziproke im Systeme existieren, d. h. solche die mit ihr multipliziert die Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & 1, & 0, & . \\ 0, & 0, & 1, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

ergeben. Ein Beispiel bietet die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & . \\ 0, & 0, & 1, & . \\ 0, & 0, & 0, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix},$$

zu der die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & . \\ 1, & 0, & 0, & . \\ 0, & 1, & 0, & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

für beliebige $a_1, a_2, \ldots$ reziprok sind. Zum Schluß sei hier nur noch der Satz erwähnt, daß jedes I, II, $\mathfrak{B}$(I, II) genügende System die Einheitsmatrix E enthält.

Göttingen, Juli 1906.