

# Stochastik: Übungsblatt 15

## Tutoriumsaufgaben

**Aufgabe T15.1** Es soll beispielsweise die Sprödigkeit eines Kühlwasserrohres in einem Kernkraftwerk überprüft werden. Dazu werden  $n$  unabhängige Messungen mit (zufälligen) Ergebnissen  $x_1, \dots, x_n$  durchgeführt. Wir nehmen an, die Messwerte sind normalverteilt mit bekannter Varianz  $v > 0$  (sie entspricht der Güte des Messinstruments) und unbekanntem Erwartungswert  $m$ , der die gesuchte Sprödigkeit angibt. Es soll getestet werden, ob  $m$  unterhalb eines zulässigen Grenzwerts  $m_0$  liegt.

Modellieren Sie die Situation als statistisches Modell und geben Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0 : m \leq m_0$  gegen  $H_1 : m > m_0$  an.

**Aufgabe T15.2** Sei  $\Theta \subset \mathbb{R}$  und  $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$  ein statistisches Modell mit wachsenden Likelihood-Quotienten bezüglich einer Statistik  $T$ . Für  $\theta_0 \in \Theta$  sei  $\varphi$  ein gleichmäßig bester Niveau- $\alpha$ -Test der Hypothese  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  gegen  $H_1 : \theta > \theta_0$ . Zeigen Sie:  $\mathbb{E}_\theta[\varphi]$  ist in  $\theta$  monoton wachsend.

**Aufgabe T15.3** Sei  $\Theta \subset \mathbb{R}$  und  $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$  ein statistisches Modell mit wachsenden Likelihood-Quotienten bezüglich einer Statistik  $T$ . Für  $\theta_0 \in \Theta$  sei  $\varphi$  ein gleichmäßig bester Niveau- $\alpha$ -Test der Hypothese  $H_0 : \theta \leq \theta_0$  gegen  $H_1 : \theta > \theta_0$ . Zeigen Sie: Der Fehler erster Art  $\varphi \mapsto \mathbb{E}_\theta[\varphi]$  ist auf der ganzen Nullhypothese minimal, d.h. für jeden weiteren Test  $\psi$  mit  $\mathbb{E}_{\theta_0}[\psi] = \alpha$  gilt  $\mathbb{E}_\theta[\varphi] \leq \mathbb{E}_\theta[\psi]$  für alle  $\theta \leq \theta_0$ .