LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 13

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T13.1 Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \{\text{Bin}(n,\theta) : 0 < \theta < 1\})$ ein statistisches Modell mit $\Omega = \{0,\dots,n\}$. Zeigen Sie, dass es sich hierbei auch um ein exponentielles Modell handelt. Geben Sie die exponentielle Familie und einen besten Schätzer an.

Aufgabe T13.2 Um bei Umfragen zu heiklen Themen („Nehmen Sie harte Drogen?“) die Privatsphäre der befragten Personen zu schützen und zuverlässige Antworten zu bekommen, wurde das folgende „Unrelated Question“-Befragungsmodell vorgeschlagen: Ein Stapel Fragekarten ist zur Hälfte mit der heiklen Frage A und zur anderen Hälfte mit einer harmlosen Frage B beschriftet, welche nicht mit Frage A zu tun hat („Waren Sie letzte Woche im Kino?“). Der Interviewer lässt jede(n) Befragte(n) die Karten mischen, eine Karte verdeckt ziehen und die darauf gestellte Frage beantworten. Die untersuchte Personengruppe enthalte einen bekannten Anteil p_B an Personen, welche Frage B bejahen (Kinogänger). Sei $\theta = p_A$ die Wahrscheinlichkeit, mit der die heikle Frage A bejaht wird. Es werden n Personen unabhängig befragt. Präzisieren Sie das statistische Modell, geben Sie einen besten Schätzer für θ an und bestimmen Sie dessen Varianz.

Aufgabe T13.3 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ regulär mit Fisher-Information $I(\theta)$. Wir betrachten nun das n-fache Produktmodell mit dessen Fisher-Information $I^{\otimes n}(\theta)$. Zeigen Sie, dass $I^{\otimes n}(\theta) = nI(\theta)$.

Aufgabe T13.4

(a) Betrachten Sie das Modell $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), P_\theta : \theta > 0)$ der Poisson-Verteilungen

$$\text{Poi}_\theta(\{n\}) = e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nehmen wir nun an, wir sind nicht daran interessiert, θ direkt zu schätzen, sondern $g(\theta) = e^{-3\theta}$ (die Wahrscheinlichkeit, in drei Versuchen keinen Treffer zu erzielen). Wir nennen einen Schätzer T für $g(\theta)$ erwartungstreu, falls $\mathbb{E}_\theta[T] = g(\theta)$. Zeigen Sie: $g(\theta)$ besitzt nur einen einzigen erwartungstreuen Schätzer, welcher wenig sinnvoll ist.

(b) Sei nun $(\Omega = \{0,\dots,n\}, \mathcal{P}(\Omega), \{\text{Bin}(n,\theta) : 0 < \theta < 1\})$ das Binomial-Modell. Zeigen Sie: $g(\theta)$ ist genau dann erwartungstreu schätzbar, wenn g ein Polynom vom Grad höchstens n ist.

Hausaufgaben

Aufgabe H13.1 Sei ein statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ mit $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ gegeben seien und weiterhin S, T zwei erwartungstreue beste Schätzer für θ. Zeigen Sie: $P_\theta(S = T) = 1$.

Aufgabe H13.2 Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\mathcal{N}(\mu, v) : \mu \in \mathbb{R}, v > 0\})$ das statistische Modell der Normalverteilung.

(a) Zeigen Sie, dass bei fester Varianz $v > 0$ die Familie $\{\mathcal{N}(\mu, v) : \mu \in \mathbb{R}\}$ eine exponentielle Familie bildet und bestimmen Sie einen besten Schätzer.

(b) Zeigen Sie, dass bei festem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ die Familie $\{\mathcal{N}(\mu, v) : v > 0\}$ eine exponentielle Familie bildet und bestimmen Sie einen besten Schätzer.

Aufgabe H13.3 Gegeben sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{Q_\theta^{\otimes n} : \theta \in \mathbb{R}\})$, wobei Q_θ die Dichte

$$f_\theta(x) = \tfrac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$$

der *zweiseitigen Exponentialverteilung* besitze. Zeigen Sie: Jeder Median der Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ ist MLE-Schätzer für θ und zeigen Sie, dass dieser nur für ungerades n eindeutig bestimmt ist. *Bemerkung: m ist Median einer Stichprobe, wenn mindestens die Hälfte aller Beobachtungen einen Wert von höchstens m und mindestens die Hälfte aller Beobachtungen einen Wert von mindestens m annimmt.*

Aufgabe H13.4 Betrachten Sie zu gegebenem $\mu \in \mathbb{R}$ das n-fache Gauß'sche Prooduktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}(\mu, \theta^2)^{\otimes n} : \theta > 0)$. Zeigen Sie: Die Statistik

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer für θ, jedoch erreicht ihre Varianz für kein θ die Cramér-Rao-Schranke $1/I(\theta)$.