

Stochastik: Übungsblatt 12

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T12.1 Sei (X_1, \dots, X_n) eine Stichprobe, der eine Gleichverteilung auf $[\theta, 2\theta]$ zugrunde liegt. Geben Sie das statistische Modell an und finden Sie einen ML-Schätzer für θ .

Aufgabe T12.2 Sei (X_1, \dots, X_n) eine Stichprobe aus einer Verteilung mit Dichte $f_\beta(x) = e^{\beta-x} \cdot \mathbf{1}_{[\beta, \infty)}(x)$, wobei $\beta \in (-1, 1)$. Finden Sie einen Momentenmethode-(MM-)Schätzer für β .

Aufgabe T12.3 Seien F und G zwei Verteilungsfunktionen mit bekannten Erwartungswerten a und b , wobei $a < b$, und (X_1, \dots, X_N) eine Stichprobe aus der Verteilung mit Verteilungsfunktion $F_\theta = \theta F + (1 - \theta)G$ für $\theta \in (-1, 1)$. Finden Sie einen MM-Schätzer für θ .

Aufgabe T12.4 Beim Sommerfest des Kaninchenzüchtervereins sollen K Kaninchen verlost werden. Dazu werden $N \geq K$ Lose gedruckt, davon K Gewinne, der Rest Nieten. Der kleine Fritz bringt – zum Entsetzen seiner Mutter – x Kaninchen mit nach Hause, $1 \leq x \leq K$. Wie viele Lose hat er wohl gekauft? Geben Sie eine Schätzung mittels der Maximum-Likelihood-(ML-)Methode sowie der MM-Methode.

Hausaufgaben

Aufgabe H12.1 Sei (X_1, \dots, X_n) eine Stichprobe aus einer $\text{Bin}(m, p)$ -Verteilung. Schätzen Sie mit Hilfe der Momentmethode

- (a) p , wenn m bekannt ist;
- (b) m , wenn p bekannt ist;
- (c) (m, p) .

Aufgabe H12.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ gilt:

$$\bar{x} = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Aufgabe H12.3

- (a) In einer Lostrommel befinden sich N Lose mit den Nummern $1, 2, \dots, N$, wobei N unbekannt ist. Der kleine Fritz will wissen, wie viele Lose sich in der Trommel befinden und entnimmt in einem unbeobachteten Augenblick ein Los, merkt sich die aufgedruckte Nummer und legt es wieder in die Trommel zurück. Das macht er n -mal.
 - (i) Berechnen Sie aus den gemerkten Nummern x_1, \dots, x_n einen ML-Schätzer T für N . Ist dieser erwartungstreu?
 - (ii) Berechnen sie approximativ für großes N den relativen Erwartungswert $\mathbb{E}_N[T]/N$.
- (b) Diesmal zieht der kleine Fritz die n Lose ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie den ML-Schätzer T für N , berechnen Sie $\mathbb{E}_N[T]$ und geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für N an.

Aufgabe H12.4 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ ein statistisches Modell, wobei $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\Theta = [0, 1]$ und P_θ die Binomialverteilung mit Parametern (n, θ) . Definiere den Schätzer $\hat{\theta} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ als $\hat{\theta}(\omega) = \bar{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i$.

- (a) Für welchen Wert von θ ist $\text{MSE}_\theta(\hat{\theta})$ am höchsten?
- (b) Ist $\hat{\theta}$ erwartungstreu?
- (c) Wie ist $\hat{\theta}$ asymptotisch verteilt?