LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 11

Auf diesem Blatt gelte, falls nicht explizit anders vermerkt, die Notation zu Verzweigungsprozessen aus der Vorlesung: $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist also ein Galton-Watson-Prozess (GWP), $(p_k)_{k\geq 0}$ die Nachkommensverteilung eines Individuums, $G(s) = \sum_{k\geq 0} s^k p_k$ und $G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$ sowie $q = P(\exists n \in \mathbb{N}_0 : Z_n = 0)$ die Aussterbewahrscheinlichkeit. Weiterhin sei Y eine nach der Nachkommensverteilung verteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[Y] = \mu$ und $\mathbb{V}ar(Y) = \sigma^2$.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T11.1 Wir definieren als P^k das Wahrscheinlichkeitsmaß eines GWP, bei dem $Z_0 = k \geq 1$. Der Rest des Prozesses wird analog definiert, es ist also insbesondere P^1 der aus der Vorlesung bekannte GWP. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$P^k(\exists n \in \mathbb{N}_0 : Z_n = 0) = q^k.$$

Aufgabe T11.2 Zeigen Sie, dass $G_n(s) = G_r(G_{n-r}(s))$ für $0 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe T11.3

(a) Sei die Nachkommensverteilung binär, es gelte also $p_0 = p$ und $p_2 = 1 - p$ für ein $p \in (0, 1)$. Berechnen Sie die Aussterbewahrscheinlichkeit q explizit.

(b) Sei die Nachkommensverteilung Poisson-verteilt, d.h. für ein λ ist $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für $k \geq 0$. Zeigen Sie $q < 1/\lambda$ für $\lambda > 1$.

Aufgabe T11.4 Zeigen Sie für einen beliebigen GWP mit $p_1 \neq 1$, ohne dabei Resultate aus der Vorlesung zu verwenden, die Ungleichungen

$$\frac{p_0}{1 - p_1} \leq q \leq \frac{p_0}{1 - p_0 - p_1}.$$

Hausaufgaben

Aufgabe H11.1

(a) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, jede mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Sei weiterhin N eine von dieser Folge unabhängige, $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ die Varianz

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(N)$$

besitzt.

(b) Für die Varianz der Nachkommensverteilung gelte $\sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z_n) = \begin{cases} n\sigma^2 & \text{falls } \mu = 1, \\ \sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1} & \text{falls } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Aufgabe H11.2 Sei $\mathcal{T}$ der Raum der markierten Wurzelbäume aus der Vorlesung mit der Abbildung $d : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to [0,1]$ definiert (wie in der VL) als

$$d(T, T') := \Big(1 + \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : T \restriction n = T' \restriction n\}\Big)^{-1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik und $(\mathcal{T}, d)$ ein vollständiger, separabler metrischer Raum ist.

(b) Definieren Sie eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{T}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$, welches einen GWP mit Nachkommensverteilung $(p_k)_{k\geq 0}$ erzeugt.

Aufgabe H11.3 Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Zeigen Sie, dass

$$E[Z_m Z_n] = \mu^{n-m}\,\mathbb{E}[Z_m^2].$$

Aufgabe H11.4 Ziel dieser Aufgabe ist es, für $\mu > 1$ zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} Z_n \in \{0, \infty\}$ fast sicher. Für $l \in \{1, \infty\}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir hierfür

$$\beta_l(k) = P^k(|\{n \in \mathbb{N} : Z_n = k\}| \geq l) = P^k(Z_n = k \text{ mindestens } l\text{-mal}),$$

wobei P^k wie in T11.1 definiert ist. Sei weiterhin $H(k) = \sum_{n\geq 0} P^k(Z_n = k)$ für $k \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $\beta_1(k) < 1$. Zeigen Sie, dass

$$1 - \beta_\infty(k) = H(k)(1 - \beta_1(k))$$

und folgern Sie, dass $\beta_\infty(k) = 0$.

(b) Nutzen Sie (a), um zu zeigen, dass $Z_\infty \in \{0, \infty\}$ f.s.