LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 10

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T10.1 Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \leq x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe T10.2 Geben Sie eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen an, die eine Varianz besitzen und für welche weder das (schwache oder starke) Gesetz der großen Zahlen noch der zentrale Grenzwertsatz gilt.

Aufgabe T10.3 In einer Abstimmung sind eine Million Wähler aufgerufen, sich zwischen zwei Kandidatinnen, A und B, zu entscheiden. Kandidatin A hat 2000 Anhänger, die geschlossen für sie stimmen. Alle anderen 998 000 Wähler sind unentschlossen und entscheiden sich (unabhängig voneinander) für eine der beiden Kandidatinnen mit je 50% Wahrscheinlichkeit. Wie hoch ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidatin A mehr Stimmen erzielt als Kandidatin B?
Zur Näherung dürfen Sie folgende Werte für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung verwenden: $\Phi(1/2) = 0,692, \Phi(1) = 0,841, \Phi(3/2) = 0,933, \Phi(2) = 0,977$.

Aufgabe T10.4 Sei $0 < p = 1 - q < 1$ und $x > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=\lceil np - x\sqrt{npq}\rceil}^{\lfloor np + x\sqrt{npq}\rfloor} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

Hausaufgaben

Bemerkung: Die mit (🌲) markierten Aufgaben sind Zusatzaufgaben. Ihre Bearbeitung ist freiwillig und kann die Gesamtpunktzahl verbessern.

Aufgabe H10.1 Seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_k \sim \operatorname{Exp}(\alpha_k)$ für eine Folge an Parametern $\alpha_k > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $\alpha_k X_k \sim \operatorname{Exp}(1)$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k X_k - 1) \leq 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

(iii) Sei nun $\alpha_k = k$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \tfrac{1}{k})^2 \xrightarrow{P} 0.$$

Aufgabe H10.2 Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, deren jeweilige Verteilungsfunktion $F_k = F_{X_k}$ stetig und streng monoton steigend sei. Zeigen Sie, dass Z_n, definiert als

$$Z_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\Big(1 + \log\left[1 - F_k(X_k)\right]\Big),$$

in Verteilung gegen $\mathcal{N}_{0,1}$ konvergiert.

Aufgabe H10.3 (🌲) Ein schweres Teilchen bewege sich in vorgegebener Richtung durch den Raum und erfahre von leichteren Teilchen durch zufällige Stöße pro Zeiteinheit eine zufällige Geschwindigkeitsumkehr, d.h. für seine Ortskoordinate (mit vorgegebener Richtung) zur Zeit t gelte $X_t = \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor} V_i$ mit unabhängigen Geschwindigkeiten V_i, wobei $P(V_i = \pm 1) = 1/2$. Geht man zu makroskopischen Skalen über, so wird das Teilchen zur Zeit t beschrieben durch die Zufallsvariable $B_t^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} X_{t/\varepsilon}$, wobei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie den Verteilungslimes B_t von $B_t^{(\varepsilon)}$ für $\varepsilon \to 0$ sowie dessen Verteilungsdichte ϱ_t. Verifizieren Sie, dass diese Dichten mit einer geeigneten Diffusionskonstanten $D > 0$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \varrho_t(x)}{\partial t} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \varrho_t(x)}{\partial x^2}$$

erfüllen.

Aufgabe H10.4 (🌲) Seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}, (Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen unabhängiger ZV mit $P(X_k = \pm 1) = 1/2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie

$$P(Y_k = \pm 1) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{k^2}\right), \quad P(Y_k = \pm(k+1)) = \tfrac{1}{2k^2}, k \in \mathbb{N}.$$

Sei weiterhin $Z \sim \mathcal{N}_{0,1}$ und sei $S_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k, T_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) S_n konvergiert in Verteilung gegen Z.

(b) Erwartungswert und Varianz von T_n konvergieren gegen $\mathbb{E}[Z]$ bzw. $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z)$.

(c) T_n konvergiert in Verteilung gegen Z.