LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 8

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T8.1 Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen in einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Wir erinnern an die Definitionen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} A_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} A_n.$$

Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Aufgabe T8.2 Es seien X und Y unabhängige stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X und f_Y. Zeigen Sie: $U = XY$ und $V = X/Y$ besitzen die Dichten

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(u/x) \tfrac{1}{|x|} \,\mathrm{d}x, \qquad f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_X(vy) f_Y(y) |y| \,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe T8.3 Seien X, Y Zufallsvariablen mit gleicher (endlicher) Varianz. Zeigen Sie, dass dann $U = X - Y$ und $V = X + Y$ unkorreliert sind. Zeigen Sie weiter, dass U und V nicht notwendigerweise unabhängig sind – selbst dann nicht, wenn X und Y unabhängig sind.

Aufgabe T8.4 Bestimmen Sie alle Verteilungen auf den nichtnegativen reellen Zahlen, die Erwartungswert μ und Median 2μ besitzen – oder beweisen Sie, dass solche Verteilungen nicht existieren.

Hausaufgaben

Aufgabe H8.1 Es seien $X_1, X_2, \dots$ unkorrelierte Zufallsvariablen, jede mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Definiere weiterhin $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \sigma^2.$$

Aufgabe H8.2 Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ sowie $\sigma^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) < \infty$. Setze $Y_n = 2X_n X_{n+1}$.

(i) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y_n für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_i, Y_j)$ für $i, j \in \mathbb{N}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} P\big(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i| \geq \varepsilon\big) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe H8.3 Nach Definition sind X und Y bivariat normalverteilt mit Parametern $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$, falls ihre Dichte von der Form

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}, \quad x, y \in \mathbb{R};$$
$$Q(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

ist. Zeigen Sie:

(a) Definieren wir $U = (X-\mu_1)/\sigma_1$ und $V = (Y-\mu_2)/\sigma_2$, so sind (U, V) bivariat standardnormalverteilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$ und $\rho(X,Y) = \rho$.

Aufgabe H8.4 Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor. Die *Kovarianzmatrix* $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von X ist definiert als $\Sigma_{ij} = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j)$ (mit $1 \leq i, j \leq 2$). Eine alternative Definition für bivariat standardnormalverteilte Zufalsvariablen erfolgt über die Kovarianzmatrix Σ: Es ist $X = (X_1, X_2)$ bivariat normalverteilt mit Parametern $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ und Σ falls

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Definition mit jener aus der Vorlesung übereinstimmt.

(b) Sei $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine vollrangige Matrix (also $\det \mathsf{A} \neq 0$) sowie $b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: $Y := \mathsf{A}X + b$ ist ebenfalls bivariat normalverteilt zu den Parametern $\tilde{\mu} = \mathsf{A}\mu + b$ und $\mathsf{A}\Sigma\mathsf{A}^\mathsf{T}$.