

Stochastik: Übungsblatt 7

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T7.1 Sei f die Dichte einer stetigen Zufallsvariable X . Zeigen Sie, dass dann

(f1) $f(x) \geq 0$ für λ -fast-alles $x \in \mathbb{R}$ (hierbei sei λ das Lebesgue-Maß) und

(f2) $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

Zeigen Sie außerdem: Wenn eine Funktion f sowohl (f1) als auch (f2) erfüllt, dann existiert eine stetige Zufallsvariable X mit Dichte $f_X = f$.

Aufgabe T7.2 Für welche Werte ihrer Parameter ist die Gamma-Verteilung auch eine Exponentialverteilung? Zur Erinnerung: Die Dichte der Gamma-Verteilung mit Parametern $\omega, \lambda > 0$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \lambda^\omega x^{\omega-1} e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Dabei ist $\Gamma(\omega) = \int_0^\infty x^{\omega-1} e^{-x} dx$.

Aufgabe T7.3

- (a) Es sei Φ_{μ, σ^2} die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable mit Parametern μ und σ^2 . Drücken Sie Φ_{μ, σ^2} durch $\Phi_{0,1}$ aus.
- (b) Sei $X \sim \mathcal{N}_{\mu, \sigma^2}$, also zu Parametern μ, σ^2 normalverteilt. Was ist die Verteilung von $Y = cX + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$?

Aufgabe T7.4 Es seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + \frac{1}{2}xy) & \text{für } 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Wert der Konstante c sowie die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y .

Hausaufgaben

Aufgabe H7.1 Sei X eine stetige Zufallsvariable, die nur nichtnegative Werte annimmt. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx,$$

vorausgesetzt, das obige Integral existiert.

Aufgabe H7.2 Benutzen Sie H7.1, um zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx,$$

wobei X und $g(X)$ stetige Zufallsvariablen seien, f_X die Dichte von X und $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$.

Aufgabe H7.3 Es sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, wobei die $(X_i)_{i \in [n]}$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ seien.

Zeigen Sie, dass S_n Gamma-verteilt mit Parametern n und λ ist. Zeigen Sie, dass für $t > 0$ die Zufallsvariable $N_t = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$ Poisson-verteilt ist.

Aufgabe H7.4 Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion $f(x, y) = cx \cdot \mathbb{1}_{\{0 < y < x < 1\}}$. Bestimmen Sie c sowie die Randdichten von X und Y . Sind X und Y unabhängig?