

Stochastik: Übungsblatt 6

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T6.1 Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften über die Verteilungsfunktion F_X einer beliebigen Zufallsvariable X :

(F1) Für $x \leq y$ ist $F_X(x) \leq F_X(y)$, F_X ist monoton also steigend.

(F2) F_X ist rechtsstetig, also $\lim_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

(F3) Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.

Aufgabe T6.2 Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und $c \in \mathbb{R}$, sodass $P(X = c) > 0$. Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ von X am Punkt c eine Unstetigkeitsstelle besitzt. Ist die Umkehrung ebenfalls wahr?

Aufgabe T6.3 Die Funktionen $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stückweise definiert durch

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 & 0 \leq x < 1 \\ 0.75 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases} \quad F_3(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 0.5x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases} \quad \text{für } \begin{cases} x < 0 \\ 0 \leq x < 1 \\ 1 \leq x < 2 \\ 2 \leq x \end{cases}.$$

Entscheiden Sie für jede Funktion F_i , ob sie Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X_i auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ mit zugehörigem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{X_i} = P_i$ ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Massenfunktion oder Dichtefunktion von X_i und berechnen Sie $P_i(\{1, 2\})$, $P_i([1, 2.5])$ und $P_i([0.5, 2])$.

Hausaufgaben

Aufgabe H6.1 Es sei (Ω, \mathcal{F}) ein Ereignisraum und X, Y Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass auch $X + Y$ sowie XY und $X \wedge Y (= \min\{X, Y\})$ wieder Zufallsvariablen sind.

Aufgabe H6.2 Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X . Zeigen Sie, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen von F_X (höchstens) abzählbar ist.

Aufgabe H6.3 Es sei X eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F . Zeigen Sie, dass $Y := F(X)$ eine auf $(0, 1)$ uniform verteilte Zufallsvariable ist.

Aufgabe H6.4 Es sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, d.h. X hat die Dichte $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$ mit $\lambda > 0$. Finden Sie die Dichte von

$$A = 2X + 5, \quad B = e^X, \quad C = \frac{1}{1 + X}.$$