LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 5

Auf diesem Blatt gilt: Falls nicht anders vermerkt bezeichne $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für $0 \leq n \leq N$ die einfache symmetrische Irrfahrt aus der Vorlesung.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T5.1
(a) Seien S, T zwei Stoppzeiten. Zeigen Sie: $S \wedge T := \min\{S, T\}$ ist ebenfalls eine Stoppzeit.
(b) Ist auch $S \vee T := \max\{S, T\}$ eine Stoppzeit?

Aufgabe T5.2 Sei $A \subseteq \mathbb{Z}$ und definiere die Zufallsvariable

$$\tau_A(\omega) = N \wedge \min\{n : S_n(\omega) \in A\}$$

(also insb. $\sigma_a = \tau_{\{a\}}$). Zeigen Sie, dass τ_A eine Stoppzeit ist.

Aufgabe T5.3 In dieser Aufgabe gelte $0 \leq n \leq 2N$. Wir definieren

$$L := \max\{0 \leq n \leq 2N : S_n = 0\}$$

als den *letzten* Besuch der Null vor dem Zeitpunkt $2N$.
(a) Ist L eine Stoppzeit?
(b) Zeigen Sie, dass für $n \leq N$

$$P(L = 2n) = P(S_{2n} = 0)P(S_{2N-2n} = 0) = 2^{-2N} \binom{2n}{n} \binom{2N-2n}{N-n}.$$

Aufgabe T5.4 Sei X eine Zufallsvariable mit erzeugender Funktion $G_X(s)$ und sei $Y = kX, Z = k + X$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die erzeugenden Funktionen $G_Y(s), G_Z(s)$.

Hausaufgaben

Aufgabe H5.1 Seien $a, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$P(S_n = a, \sigma_0 > n) = \tfrac{a}{n} P(S_n = a).$$

Aufgabe H5.2 Bei einer Wahl erhält Kandidat A genau a Stimmen und Kandidat B erhält $b < a$ Stimmen. Die Stimmen werden nacheinander in zufälliger Reihenfolge ausgezählt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat A in der Auszählung zu jedem Zeitpunkt führt?

Aufgabe H5.3 Beim Roulette wird der Einsatz des Spielers verdoppelt, wenn die Kugel in einer der 18 Felder derjenigen Farbe (schwarz oder rot) landet, auf die gesetzt wurde. Landet der Ball auf der Null, so gewinnt das Casino. Die Gewinnwahrscheinlichkeit in diesem Spiel ist also $p = 1 - q = 18/37$.
Sie starten mit einem Einsatz von 50 Euro und dem Ziel, Ihren Einsatz zu verdoppeln. Allerdings können Sie pro Runde maximal einen Euro setzen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie tatsächlich 100 Euro erhalten, ohne bankrott zu gehen? Um diese Frage zu beantworten, gehen Sie wie folgt vor:

(a) Definieren Sie analog zum symmetrischen Fall eine Irrfahrt auf $\Omega = \{\pm 1\}^N$, deren Wahrscheinlichkeit, einen Schritt in positive Richtung zu gehen, p sei. Definieren Sie das W-Maß $P = P^N$ sowie die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_N$ und S_n.

(b) Betrachten Sie

$$A_N(z) = P^N(\sigma_{M-z} < \sigma_{-z})$$

für ein natürliches $z \leq M \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $A(z) := \lim_{N\to\infty} A_N(z)$ existiert.

(c) Zeigen Sie, dass für $x \in \{\pm 1\}$

$$P^N(\sigma_a < \sigma_b \mid S_1 = x) = P^{N-1}(\sigma_{a-x} < \sigma_{b-x}).$$

Nutzen Sie diese Identität, um

$$A_N(z) = qA_{N-1}(z-1) + pA_{N-1}(z+1)$$

und damit $A(z) = qA(z-1) + pA(z+1)$ zu zeigen.

(d) Stellen Sie $B(z) = A(z+1) - A(z)$ $(0 \leq z < M)$ rekursiv dar (d.h. stellen Sie $B(z+1)$ als Funktion von $B(z)$ dar). Geben Sie damit $A(z)$ explizit an.

(e) Setzen Sie die entsprechenden Werte ein, um die ursprüngliche Roulette-Frage zu lösen!

Aufgabe H5.4 Die Zufallsvariable X habe die erzeugende Funktion $G_X(s)$; definiere zudem $u_n = P(X > n)$. Zeigen Sie, dass $U(s) = \sum_{k\geq 0} u_k s^k$, die erzeugende Funktion der Folge (u_k), die Identität

$$(1-s)U(s) = 1 - G_X(s)$$

erfüllt, vorausgesetzt, die beiden U und G_X definierenden Reihen konvergieren.