LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 4

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T4.1 Wir wählen zufällig gleichverteilt eine Permutation $\sigma : [n] \to [n]$ aus der Menge aller Permutationen der Zahlen $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Modellieren Sie einen zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum und definieren Sie die Zufallsvariable X als die Zahl der Fixpunkte (es ist $i \in [n]$ ein Fixpunkt von σ falls $\sigma(i) = i$). Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Aufgabe T4.2 Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen X, Y ist definiert als

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ sowie $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ und $\mathbb{C}\mathrm{ov}(aX + b, cY + d) = ac\, \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j).$$

Folgern Sie: Sind die $(X_i)_{i \in [n]}$ unabhängig, so gilt $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i)$.

Aufgabe T4.3 Sei N die Anzahl der Würfe einer fairen Münze, bis zum ersten Mal Kopf erscheint (dieser Wurf eingeschlossen). Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[N] = 2$, indem Sie auf den Ausgang des ersten Wurfs bedingen.

Aufgabe T4.4 Ein Teller Spaghetti enthalte n Spaghetti-Nudeln. Anton wählt zufällig zwei Enden aus und verklebt sie; er wiederholt dieses Spiel, bis keine Enden mehr übrig sind. Was ist die erwartete Zahl an Spaghetti-Schleifen, die sich nach Ende des Spiels im Teller befinden?

Hausaufgaben

Aufgabe H4.1

(a) Seien X, Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Pois}(\mu)$ (wobei $\lambda, \mu > 0$). Zeigen Sie: Für $S = X + Y$ gilt $U \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$.

(b) Seien X, Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Geom}(p)$ und $Y \sim \text{Geom}(r)$ (wobei $p, r \in [0, 1]$). Zeigen Sie: Für $U = \min\{X, Y\}$ gilt $U \sim \text{Geom}(p + r - pr)$.

Aufgabe H4.2 Wir stellen ein einfaches Modell für einen *Zufallsgraphen* vor: Man starte mit n Knoten $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und verbinde jedes Knotenpaar $\{v_i, v_j\}$ $(i \neq j)$ mit einer Kante unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}n(n-1)p$ die erwartete Anzahl an Kanten im Zufallsgraphen ist.

(b) Eine k-Clique ist eine Menge von k Knoten, sodass jedes Paar solcher Knoten mit einer Kante verbunden ist. Berechnen Sie die erwartete Anzahl an k-Cliquen im Zufallsgraphen.

Aufgabe H4.3 Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}([n])$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft, dass es keine Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gibt ($\mathcal{A}$ enthält also keine zwei Mengen, sodass eine die andere enthält). Sei σ eine zufällige Permutation von $[n]$ und definiere

$$X = \big|\{i \in [n] : \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\} \in \mathcal{A}\}\big|.$$

Zeigen Sie $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, indem Sie $\mathbb{E}[X]$ betrachten.

Aufgabe H4.4 Wir betrachten die einfache Irrfahrt, d.h. $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \{-1, 1\}^N\}$ mit der Laplace-Verteilung, k-tem Schritt $X_k(\omega) = \omega_k$ sowie $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_N$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $P(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Irrfahrt unabhängige Zuwächse hat, d.h. für $0 < k_1 < \ldots < k_n \leq N$ sind die Zufallsvariablen $(S_{k_i} - S_{k_{i-1}})_{i \in [n]}$ unabhängig.

(c) Zeigen Sie: Für $0 < k < m \leq N$ und alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $P(S_m - S_k = a) = P(S_{m-k} = a)$, d.h. $S_m - S_k$ und S_{m-k} sind identisch verteilt.

(d) Zeigen Sie, dass die Familie $\{S_n\}_{n=0}^{N}$ die *Markov-Eigenschaft* besitzt, d.h.

$$P(S_n = a_n \mid S_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, S_1 = a_1) = P(S_n = a_n \mid S_{n-1} = a_{n-1})$$

für $0 < n \leq N$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ so, dass $P(S_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, S_1 = a_1) > 0$.