

## Stochastik: Übungsblatt 3

*Hinweis: Auf diesem Blatt darf die Linearität des Erwartungswerts (also  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ ), die in der Vorlesung am 03.11. rigoros bewiesen wird, verwendet werden.*

### Tutoriumsaufgaben

**Aufgabe T3.1** Sei  $X$  eine Zufallsvariable, deren Varianz existiert. Seien weiterhin  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

**Aufgabe T3.2** Zeigen Sie:

- (a) Ist  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] = 0$ , dann ist  $P(X = 0) = 1$ .
- (b) Ist  $\text{Var}(X) = 0$ , so ist  $P(X = \mu) = 1$ .

**Aufgabe T3.3** Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von  $X \sim \text{Ber}(p)$  sowie  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$  und  $Z \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

### Hausaufgaben

**Aufgabe H3.1** Es sei  $X$  eine Zufallsvariable, die Werte in  $\mathbb{N}_0$  annimmt und deren Erwartungswert existiert. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

Berechnen Sie als Anwendung  $\mathbb{E}[X]$  für  $X \sim \text{Geom}(p)$  und  $p \in (0, 1)$ .

**Aufgabe H3.2** Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable,  $a \in \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  eine monoton steigende Funktion. Zeigen Sie

$$h(a)P(X \geq a) \leq \mathbb{E}[h(X)].$$

Folgern Sie für  $a > 0$  die Markov- bzw. die Tschebyscheff-Ungleichung:

$$P(|X| \geq a) \leq a^{-1} \mathbb{E}[|X|], \quad \text{bzw.} \quad P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq a^{-2} \text{Var}(X).$$