LMU München
Mathematisches Institut
WS 2017/18

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik: Übungsblatt 2

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe T2.1 Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Ereignisse mit $P(B) > 0$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$,
(ii) $P(B) < 1 \Rightarrow P(A|B^c) = 1 - P(A|B)$,
(iii) A, B unabhängig $\iff A, B^c$ unabhängig,
(iv) $P(B) = 1 \Rightarrow P(A|B) = P(A)$,
(v) $P(A|A \cup B) \geq P(A|B)$,
(vi) $P(A|B) \geq P(A)$,
(vii) $P(A|B) \geq P(B)$,
(viii) $P(A|B) \geq P(A \cap B)$.

Aufgabe T2.2 Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. Zeigen Sie

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=2}^{n} P\left(A_i \mid A_{i-1} \cap \ldots \cap A_1\right) P(A_1),$$

wobei alle auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten positiv seien.

Aufgabe T2.3 Gegeben sei ein fairer, p-seitiger Würfel, wobei p eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass im Ereignisraum des einmaligen Wurfs dieses Würfels zwei Ereignisse A und B nur dann unabhängig sein können, wenn mindestens eines der beiden Ereignisse der ganze Ergebnisraum Ω oder $\emptyset$ ist.

Aufgabe T2.4 Finden Sie drei Ereignisse A, B, C auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, sodass $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, aber A, B, C, nicht unabhängig sind.

Aufgabe T2.5 Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Sei T das Produkt der Augenzahlen. Definieren Sie T als Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie $P(T = 6)$.

Hausaufgaben

Aufgabe H2.1 Im folgenden Experiment werden mir mit zwei Urnen konfrontiert. Die erste Urne enthalte drei weiße und vier schwarze Bälle, die zweite Urne zwei weiße und sechs schwarze.

(a) Man ziehe zufällig (gleichverteilt) einen Ball aus Urne 1 und lege ihn in Urne 2. Nun ziehe man zufällig aus Urne 2. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Ball schwarz ist?

(b) Man wähle nun zufällig eine der beiden Urnen (jede mit Wahrscheinlichkeit $1/2$) und ziehe aus der gewählten Urne einen Ball. Gegeben, dass der gezogene Ball schwarz ist, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne 1 ausgewählt wurde?

Aufgabe H2.2 Finden Sie eine Kollektion von $n+1$ abhängigen Ereignissen, sodass je n davon unabhängig sind.

Aufgabe H2.3 Aus einer Urne mit Kugeln der Aufschrift $1, 2, \ldots, N$ wird n mal gezogen und es sei X die höchste gezogene Nummer. Definieren Sie X als Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie ihre Verteilung, falls

- mit Zurücklegen
- ohne Zurücklegen

gezogen wird.

Aufgabe H2.4 Sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable. Definiere $Y = |\sin(\frac{1}{2}\pi X)|$. Finden Sie die Verteilung von Y.

Aufgabe H2.5* Sei $n \geq 2$, $\Omega = \mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Für jede Permutation $\pi \in \Omega$ sei

$$X(\pi) = \min\{1 \leq j \leq n : \pi^j(1) = 1\}$$

die Länge des Zyklus von π, welcher die 1 enthält. Dabei sei $\pi^j = \overbrace{\pi \circ \ldots \circ \pi}^{j\text{-mal}}$ die j-fache Iterierte von π. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable X auf $\{1, \ldots, n\}$ gleichverteilt ist.

*Hinweis: Mit einem * markierte Aufgaben sind nicht abzugeben bzw. werden nicht korrigiert.*