

Stochastik: Übungsblatt 1

Tutoriumsaufgaben

Diese Woche gibt es noch keine Tutoraufgaben.

Hausaufgaben

Aufgabe H1.1 Martin, Maximilian, Lutz und Thomas spielen Schafkopf (32 Karten, 14 Trümpfe, 8 Karten pro Spieler). Stellen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- (a) Martin hat die 8 höchsten Trümpfe.
- (b) Maximilian hat 8 Trümpfe.
- (c) Lutz hat zwei Karten von jeder Farbe.
- (d) Thomas hat 7 Trümpfe.

Aufgabe H1.2 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und A_1, \dots, A_n Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie

- (a) die Schranke $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$,
- (b) die Inklusions-Exklusions-Formel

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right), \end{aligned}$$

- (c) die Ungleichung

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - n + \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Aufgabe H1.3 Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, (A_n)_{n \geq 1}$ Ereignisse in \mathcal{F} . Zeigen Sie:

- (a) $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \geq 1$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \Rightarrow P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$.
- (b) $A_n \subseteq A_{n-1} \forall n \geq 2$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \Rightarrow P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$.

Aufgabe H1.4

- (a) Eine faire Münze wird $2n$ -mal geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau so oft Kopf wie Zahl fällt? Nutzen Sie die Stirling-Formel, um zu zeigen, dass sich diese Wahrscheinlichkeit asymptotisch wie $(\pi n)^{-1/2}$ verhält.
- (b) Wir werfen nun $3n$ -mal und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, doppelt so oft Kopf wie Zahl zu erhalten sowie nach dem asymptotischen Verhalten dieser Wahrscheinlichkeit.