LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1
Zeigen Sie, dass die empirische Verteilungsfunktion alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion besitzt, also monoton wachsend und rechtsstetig ist sowie das korrekte Grenzwertverhalten aufweist.

Aufgabe 11.2
Beweisen Sie Lemma 7.7 aus der Vorlesung: Zeigen Sie, dass für reelle Produktmodelle $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \{P_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \Theta\})$, wobei für jedes $\vartheta \in \Theta$ sowohl Erwartungswert $m = \mathbb{E}[P_\vartheta]$ als auch Varianz $v = \mathrm{Var}(P_\vartheta)$ wohldefiniert seien, empirischer Erwartungswert und empirische Varianz erwartungstreue Schätzer für m und v sind.

Aufgabe 11.3
Beweisen Sie Lemma 7.9 aus der Vorlesung: Für ein statistisches Modell mit Parameterdarstellung $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$, eine Kenngröße $\tau : \Theta \to \mathbb{R}$ und einen Schätzer $\hat{\tau}$ mit endlichem Bias gilt $\mathrm{MSE}(\vartheta) = \mathrm{Var}_{P_\vartheta}(\hat{\tau}) + \mathrm{bias}(\vartheta)^2$.

Aufgabe 11.4
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ ein statistisches Modell in Parameterdarstellung mit $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}(\Omega), \Theta = \mathbb{R}_{>0}$ und $P_\vartheta = \mathcal{U}_{[0,\vartheta]}^{\otimes n}$, wobei $\mathcal{U}_{[0,\vartheta]}$ die Uniformverteilung auf $[0, \vartheta]$ bezeichnet. Finden Sie einen erwartungstreuen Schätzer für ϑ.

Aufgabe 11.5
Sei $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $M(w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega_i$ gilt:

$$M(\omega) = \arg\min_{a \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\omega_i - a)^2.$$

Aufgabe 11.6
Sei ein statistisches Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ gegeben, wobei $\Omega = \{0,1\}^n, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\Theta = [0,1]$ und P_ϑ die Bernoulliverteilung für n Alternativversuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit ϑ bezeichne. Definiere den Schätzer $\hat{\tau} : \Omega \to [0,1]$ als $\hat{\tau}(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega_i$.

(i) Für welchen Wert von ϑ ist $\mathrm{MSE}_{\hat{\tau}}(\vartheta)$ am höchsten?

(ii) Ist $\hat{\tau}$ erwartungstreu?

(iii) Wie ist der Schätzer $\hat{\tau}$ asymptotisch verteilt?