LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

# Stochastik
# Übungsblatt 9

**Definition** Eine Markovkette $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ in einem abzählbaren Zustandsraum $E$ heißt *irreduzibel*, wenn es für alle $i, j \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $P(X_n = i | X_0 = j) > 0$ (jeder Zustand wird von jedem anderen Zustand aus in einer endlichen Anzahl an Schritten mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht).

Definiere zudem für jedes $i \in E$ die Menge $N_i := \{n \in \mathbb{N} : P(X_n = i | X_0 = i) > 0\}$ der möglichen Rückkehrzeiten zum Startpunkt $i$. Dann heißt $d(i) := \mathrm{ggT}(N_i)$ die *Periode* des Zustands $i$. Falls $N_i = \emptyset$, setze $d(i) = \infty$. Eine Markovkette heißt *aperiodisch*, falls $d(i) = 1$ für alle Zustände $i \in E$.

**Aufgabe 9.1**
Sei $E$ eine nichtleere abzählbare Menge und sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ eine Folge unabhängiger $E$-wertiger Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Welche Eigenschaften muss die Folge $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ erfüllen, um eine Markovkette zu sein? Beschreiben Sie in diesem Fall die zugehörige Übergangsmatrix $\Pi$.

**Aufgabe 9.2**
Seien $E, F$ abzählbare Mengen, sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E$ und sei $h : E \to F$ eine Abbildung. Für $t \in \mathbb{Z}_+$ definieren wir $Y_t := h(X_t)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ eine Markovkette ist, falls $h$ injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ keine Markovkette zu sein braucht, falls $h$ nicht injektiv ist.

**Aufgabe 9.3**
Sei $\Pi$ die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markovkette $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ mit Zustandsraum $E$. Es gebe einen Zustand $i_0 \in E$ mit $\Pi(i_0, i_0) > 0$. Zeigen Sie, dass die Markovkette aperiodisch ist.

**Aufgabe 9.4**
Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathbb{Z}_n$ die zyklische Gruppe mit $n$ Elementen. Betrachten Sie die einfache Irrfahrt $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ auf $\mathbb{Z}_n$ mit $X_0 \sim \mathcal{U}_{\{0,\dots,n-1\}}$, deren Zuwächse $Y_1, Y_2, \dots$ die Verteilung $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = 1/2$ besitzen. Ist die Irrfahrt irreduzibel bzw. aperiodisch? Zeichnen Sie einen geeigneten Übergangsgraphen.

**Aufgabe 9.5**

Sei $E = \{1, 2\}$. Gegeben sei die stochastische Matrix $\Pi \in [0, 1]^{E \times E}$ durch

$$\Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

mit $p, q \in (0, 1)$. Bestimmen Sie für eine Markovkette $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ mit Übergangsmatrix $\Pi$ und einer beliebigen Startverteilung $X_0$ die stationäre Verteilung für $t \to \infty$.