LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1
Vervollständigen Sie die Beweisskizze „(b) $\Longrightarrow$ (c)“ im Satz 3.16 der Vorlesung: Begründen Sie, warum die $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auf $(0,1)$ uniform verteilt sind und warum die $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger ZV'en mit den gewünschten Eigenschaften sind.

Aufgabe 6.2
(a) Aus der Box $\mathbb{Z}^2 \cap [1,n]^2$ werde zufällig ein Punkt gewählt, wobei X und Y, die x- bzw. y-Koordinate beschreibenden Zufallsvariablen, unabhängig und gleichverteilt seien. Berechnen Sie die Dichtefunktion von $X+Y$.
(b) Seien X_1, X_2 unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit stetigen Dichten f_1 und f_2. Zeigen Sie, dass $Y = X_1 + X_2$ die Dichte $f(y) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(y-x)dx$ hat.
(c) Im Einheitsquadrat $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ werde zufällig ein Punkt gewählt, wobei X und Y, die x- bzw. y-Koordinate beschreibenden Zufallsvariablen, unabhängig und gleichverteilt seien. Berechnen Sie Dichtefunktion und Erwartungswert von $X+Y$.

Aufgabe 6.3
Beweisen Sie Lemma 4.5 aus der Vorlesung.

Aufgabe 6.4
Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}_+$ und gelte $X \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

Aufgabe 6.5
Konstruieren Sie zwei Zufallsvariablen X_1, X_2, sodass X_1 und X_2 unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

Aufgabe 6.6
Sei $X \in \mathcal{L}^2$. Zeigen Sie, dass die durchschnittliche quadratische Abweichung $\mathbb{E}[(X-a)^2]$ für $a := \mathbb{E}[X]$ minimiert wird.