LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 5

Hinweis: Sofern auf diesem Blatt ein Integral über mehrere Variablen auftritt, darf (ohne Beweis) der Satz von Fubini angewendet werden, d. h. die Integrationsreihenfolge darf vertauscht werden.

Aufgabe 5.1
Seiten E, F Ereignisse mit $P(E \cap F) > 0$. Zeigen Sie

$$\text{(a) } P(E \cap F|E) \geq P(E \cap F|E \cup F), \quad \text{(b) } P(E|E \cup F) \geq P(E|F).$$

Aufgabe 5.2
Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen mit stetigen Dichten und gemeinsamer Dichte (d. h. die gemeinsame Verteilung hat die Dichte)

$$f(x, y) = abe^{-ax-by}\mathbb{1}_{[0,\infty)^2}(x, y)$$

mit $a, b > 0$ bzgl. des Lebesgue-Maßes. Bestimmen Sie

(a) die Verteilung von $Z = X/Y$.
Für die Fleißigen: Lösen Sie die Aufgabe zusätzlich auf einem zweiten Weg, der die gemeinsame Verteilung von $Z = X/Y$ und $W = X$ benutzt.

(b) die Verteilung von $Z = X/Y$ gegeben das Ereignis $\{Y \geq X\}$.

Aufgabe 5.3
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

$$X_1, \ldots, X_n \text{ mit } n \geq 2 \text{ paarweise unabhängig} \Longrightarrow X_1, \ldots, X_n \text{ unabhängig.}$$

Aufgabe 5.4
Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt. F sei die Verteilungsfunktion von X_1, und es seien $Y := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ und $Z := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von Y und Z.

(b) Nun sei X_1 geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie die Dichte von Z.

Aufgabe 5.5
Seien $X_1, \ldots, X_n$ reellwertige Zufallsvariablen mit stetigen Dichten $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ und stetiger gemeinsamer Dichte $f(x_1, \ldots, x_n)$ bzgl. des Lebesgue-Maßes. Zeigen Sie, dass die X_i genau dann unabhängig sind, wenn $f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1} \cdot \ldots \cdot f_{X_n}$.