LMU München
Mathematisches Institut
WS 2015/16

Gregor Svindland
Kilian Matzke

Stochastik
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1
Es seien $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $A, B \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie:
(i) $A \cap B \in \mathcal{F}$, (ii) $A \setminus B \in \mathcal{F}$, (iii) $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 1.2
Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, die alle abgeschlossenen Intervalle enthält. Zeigen Sie: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält alle offenen und halboffenen Intervalle und alle abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.3
Modellieren Sie folgende Experimente durch geeignete Ergebnisräume Ω. Geben Sie Ihre Interpretationen für die Ergebnisse $\omega \in \Omega$ an:

(a) Es werden n ununterscheidbare Tischtennisbälle auf m unterscheidbare Schachteln verteilt, wobei nicht alle Schachteln gleich viele Kugeln enthalten brauchen und manche Schachteln leer bleiben dürfen.

(b) Es wird ein Würfel einmal geworfen und anschließend ein zweiter Würfel so oft, wie der erste Augen zeigt.

(c) Eine unbekannte, aber endliche, positive Anzahl unterscheidbarer Punktteilchen wird im Raum $\mathbb{R}^3$ verteilt. Wie ändert sich Ihr Modell, wenn die Teilchen ununterscheidbar sind?

Aufgabe 1.4
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie:

(a) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$,

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Aufgabe 1.5
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, (A_n)_{n \geq 1}$ Ereignisse in $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

(a) $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall\, n \geq 1$ und $A_n \to A \quad \Rightarrow \quad P(A_n) \to P(A)$,

(b) $A_n \subseteq A_{n-1} \ \forall\, n \geq 2$ und $A_n \to A \quad \Rightarrow \quad P(A_n) \to P(A)$.