LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Übungsblatt 11

Hausaufgaben

Bemerkung: Die auf diesem Blatt vorkommenden stetigen Verteilungen werden in der Vorlesung am Montag (15.07.) formal eingeführt.

Aufgabe H11.1 Anhand von n Ziehungen des Samstagslottos „6 aus 49“ soll getestet werden, ob die „13“ eine Unglückszahl ist, weil sie seltener gezogen wird als zu erwarten wäre. Formulieren Sie das statistische Testproblem und geben Sie (mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes) einen Test zum Niveau $\alpha = 0.1$ an, der den kritischen Bereich $\mathcal{K}$ maximiert.
Wie lautet Ihre Entscheidung für die 2682 Ziehungen von 9.10.1955 bis zum 3.3.2007, bei denen die „13“ nur 264-mal gezogen wurde (mit Abstand um unteren Ende der Häufigkeitsskala)? *Hinweis:* $\Phi^{-1}(0.1) = -1.2816$.

Aufgabe H11.2 Es soll die Sprödigkeit eines Kühlwasserrohres in einem Kernkraftwerk überprüft werden. Dazu werden n unabhängige Messungen mit (zufälligen) Ergebnissen $x_1, \dots, x_n$ durchgeführt. Wir nehmen an, die Messwerte sind normalverteilt mit bekannter Varianz $v > 0$ (sie entspricht der Güte des Messinstruments) und unbekanntem Erwartungswert m, der die gesuchte Sprödigkeit angibt. Es soll getestet werden, ob m unterhalb eines zulässigen Grenzwerts m_0 liegt.
Modellieren Sie die Situation als statistisches Modell für die Hypothese $H_0 : m \leq m_0$ gegen die Alternative $H_1 : m > m_0$ mit kritischem Bereich $\mathcal{K} = \{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i > c\}$ an. Für welche Werte von c ist der Test ein Signifikanztest zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$?
Eine Zufallsgröße X ist normalverteilt mit Erwartungswert $m \in \mathbb{R}$ und Varianz $v > 0$, falls für alle $t \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2v}(x-m)^2} \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe H11.3

(a) Sei $\lambda > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeben mit

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist, dass also $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Berechnen Sie außerdem für eine Zufallsvariable X mit Dichte f Erwartungswert und Varianz, also insbesondere

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(X mit Dichte f heißt exponentialverteilt zum Parameter λ.)

(b) Seien $\alpha, r > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeben mit

$$f(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, \qquad \text{wobei } \Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1} \mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist, dass also $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Berechnen Sie außerdem für eine Zufallsvariable X mit Dichte f den Erwartungswert. Sie dürfen hierbei verwenden, dass die Gamma-Funktion die Eigenschaft $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$ besitzt. *(X mit Dichte f heißt gammaverteilt zu den Parametern α, r.)*

Aufgabe H11.4

(a) Drei Zahlen a, b, c werden in $[0, 1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig voneinander gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bilden a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks?

(b) Auf dem Einheitskreis werden zufällig gleichverteilt und unabhängig voneinander drei Punkte A, B, C gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeits liegt der Kreismittelpunkt im von A, B, C aufgespannten Dreieck?