LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Übungsblatt 10

Hausaufgaben

Aufgabe H10.1 Ein fairer Würfel werde 12000-mal geworfen. Bezeichne S die Anzahl geworfener Sechser. Nutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz, um $a, b \in \mathbb{R}$ zu finden, sodass

$$P(1900 < S < 2200) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Geben Sie außerdem einen approximativen Wert für das Integral auf der rechten Seite.

Aufgabe H10.2 Es sei $N \in \mathbb{N}$ und seien weiterhin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte und auf $\{1, \dots, N\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Definiere

$$Y_n := \min_{1\le i\le n} X_i, \qquad Z_n := \max_{1\le i\le n} X_i.$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y_n und Z_n für $N \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch konvergieren und bestimmen Sie die beiden Grenzwerte.

Aufgabe H10.3 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{2})$, also $P(X_1 = k) = 2^{-k-1}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$P\Big(\sum_{i=1}^n (X_i - 1) > 0\Big) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H10.4 Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit

$$P(X_1 = k) = \tfrac{1}{\vartheta}\big(1 - \tfrac{1}{\vartheta}\big)^{k-1}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $\vartheta \in \Theta := (1, \infty)$. (In anderen Worten, $X_1 - 1$ ist $\mathrm{Geo}(\frac{1}{\vartheta})$-verteilt.)

(a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ zu einer Realisierung $x = (x_1, \dots, x_n)$ von $(X_1, \dots, X_n)$. Bestimmen Sie weiter den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\vartheta}_n$.

(b) Ist $\widehat{\vartheta}_n$ erwartungstreu?