

Stochastik (LAG): Übungsblatt 9

Hausaufgaben

Aufgabe H9.1 Eine Münze zeige „Kopf“ mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Diese Münze werde (unabhängig) wiederholt geworfen. X bezeichne die Anzahl der Würfe, bevor zum ersten Mal beide Seiten der Münze zu sehen waren (d.h. X ist die Länge des initialen „Laufs“). Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Aufgabe H9.2 Eine Münze zeige „Kopf“ mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Diese Münze werde (unabhängig) wiederholt geworfen, bis zum ersten Mal n -mal in Folge Kopf zu sehen war. Sei X die Anzahl an Würfeln, die dafür nötig war. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Aufgabe H9.3 Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen und $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- (a) Gilt $\mathbb{E}[|X_n - x|] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, so folgt $X_n \xrightarrow{P} x$.
- (b) Gilt $X_n \xrightarrow{P} x$ und $Y_n \xrightarrow{P} y$, dann gilt auch $aX_n + bY_n \xrightarrow{P} ax + by$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
- (c) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \sim \text{Ber}(\frac{1}{n})$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{P} 0$.
- (d) Sei $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}X_n \xrightarrow{P} p$.

Aufgabe H9.4 Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Definiere $Y_n := X_n X_{n+1}$ und weiter $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Zeigen Sie, dass $S_n/n \xrightarrow{P} 0$.