LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Übungsblatt 8

Hausaufgaben

Aufgabe H8.1 Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, (A_n)_{n\geq 1}$ Ereignisse. Zeigen Sie:

(a) $A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall\ n \geq 1$ und $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \quad \Rightarrow \quad P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} P(A)$.

(b) $A_n \subseteq A_{n-1}\ \forall\ n \geq 2$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \quad \Rightarrow \quad P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} P(A)$.

Aufgabe H8.2 Sei $k \in \mathbb{N}$.

(a) Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|^{k+1}] < \infty$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbb{E}[X^k] < \infty$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie ein Beispiel für eine Zufallsvariable, sodass $\mathbb{E}[X^k]$ existiert, $\mathbb{E}[X^{k+1}]$ jedoch nicht. *(Insbesondere gibt es also Zufallsvariablen, die einen Erwartungswert, aber keine Varianz besitzen.)*

Aufgabe H8.3 Wir betrachten die einfache symmetrische Irrfahrt: Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvaraiblen mit $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ und definiere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sei weiterhin $K \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$P(|S_n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}) = 0.$$

(Das heißt, dass die Irrfahrt jedes Intervall $[-K, K]$ mit Wahrscheinlichkeit 1 früher oder später verlässt.)

Aufgabe H8.4 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien n Punkte mit Bezeichnung $\{1, \dots, n\}$ gegeben. Man nehme an, jedes der $\binom{n}{2}$ Punktepaare werde mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ verbunden (unabhängig von allen anderen Verbindungen). Bezeichne D_i die Anzahl an Verbindungen, die Punkt i besitzt.

(a) Was ist die Verteilung von D_i?

(b) Berchnen Sie die Korrelation $r(D_i, D_j)$.