LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Übungsblatt 7

Hausaufgaben

Es seien X, Y zwei Zufallsvariablen. Wie definieren die *Kovarianz* von X und Y als

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])].$$

Aufgabe H7.1 Es seien X, Y zwei Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

(b) Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j).$$

(c) Zeigen Sie: Sind X, Y unabhängig, so gilt $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = 0$. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe H7.2
Ein Tetraeder-Würfel (also ein Würfel mit vier Seiten und Augenzahlen 1 bis 4 auf diesen Seiten) werde zweimal nacheinander geworfen. Dabei bezeichne X_1 die Augenzahl des ersten Wurfes und X_2 die Augenzahl des zweiten Wurfes.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y = \max\{X_1, X_2\}$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1 und Y.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, Y)$.

Aufgabe H7.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \dots, X_{n+1}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ sowie $\sigma^2 := \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$. Setze $Y_i = 2X_iX_{i+1}$.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y_i für $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_i, Y_j)$ für $i, j \le n$.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} P\big(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i| \ge \varepsilon\big) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe H7.4 Es sei X mit $\mathbb{E}[X] > 0$ eine Zufallsvariable, die nur nichtnegative ganzzahlige Werte annimmt. Zeigen Sie, dass

$$P(X=0) \le \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{\mathbb{E}[X]^2}.$$