LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Übungsblatt 6

Hausaufgaben

Aufgabe H6.1 Sie stehen mit einer anderen Person an einer Bushaltestelle, an der in regelmäßigen Abständen ein Bus hält. Da die Busse bereits sehr voll sind, kann jedoch immer nur eine Person einsteigen. Wir gehen davon aus, dass der Busfahrer jeden Wartenden mit gleicher Wahrscheinlichkeit einsteigen lässt. Zusätzlich erreichen nach Abfahrt jedes Busses in der Zeit bis zum jeweils nächsten Bus zwei neue Personen die Haltestelle.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der Sie im n-ten Bus mitfahren.

(b) Zeigen Sie anschließend, dass die Wahrscheinlichkeit, spätestens im n-ten Bus mitzufahren, genau $\frac{n}{n+1}$ ist.

Aufgabe H6.2 Eine faire Münze werde n mal geworfen, wobei $n \in \mathbb{N}$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei A_i das Ereignis, im i-ten Wurf Zahl zu bekommen. Außerdem sei B das Ereignis, eine gerade Anzahl an Köpfen zu erhalten.

(i) Stellen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $P(B)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ abhängig, aber jeweils n dieser $n + 1$ Ereignisse unabhängig sind.

Aufgabe H6.3 Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, C Ereignisse mit den folgenden Eigenschaften:

- A, B, C sind paarweise unabhängig,
- $A \cap B \cap C = \varnothing$,
- $P(A) = P(B) = P(C) = p$.

Zeigen Sie: $p \leq 1/2$.

Aufgabe H6.4 Sei Z eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, \ldots, N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Seien weiter $X_1, \ldots, X_N$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die zudem auch von Z unabhängig sind. Wir definieren die Zufallsvariable

$$Y = \sum_{i=1}^{Z} X_i.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X_1]$.