LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Übungsblatt 4

Hausaufgaben

Aufgabe H4.1 Seien A, B Ereignisse auf einem W-Raum (Ω, P) und sei $P(B) > 0$. Wir definieren

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:
(i) $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$,
(ii) $P(A \mid B) \geq P(B)$,
(iii) $P(A \cap B \mid B) \geq P(A \cap B \mid A \cup B)$,
(iv) $P(A \mid A \cup B) \geq P(A \mid B)$.

Aufgabe H4.2 Sei $N \in \mathbb{N}$. Sie wählen rein zufällig eine Zahl n aus $\{1, \ldots, N\}$ und werfen anschließend n-mal eine faire Münze. Geben Sie einen zweistufigen W-Raum für dieses Experiment an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt die Münze jedes Mal „Kopf"?

Aufgabe H4.3 Nehmen wir an, Sie züchten eine Bakterienkolonie in einer Petrischale. Von einer Generation auf die nächste kann sich jedes Bakterium entweder in zwei neue Bakterien teilen oder es stirbt. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (und unabhängig vom Verhalten der anderen Bakterien) ein. Wir betrachten die Generationen $\{0, \ldots, N\}$. Sei Z_n die Anzahl der Bakterien in Generation n, und sei $Z_0 = 1$, das heißt wir beginnen das Experiment mit einem Bakterium.

(a) Geben Sie einen mehrstufiges Raum $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$ mit $\Omega_0 = \{1\}$ und $\Omega_i \subseteq \mathbb{N}_0$ an, welcher die Generationenzahl modelliert.
Wir nennen $(a_0, \ldots, a_n)$ eine *zulässige Folge*, wenn es in unserem Experiment möglich ist, dass für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ in der i-ten Generation genau a_i Bakterien leben. Begründen Sie, warum eine zulässige Folge $a_i \in 2\mathbb{N}_0$ und $a_i \leq 2a_{i-1}$ erfüllen muss. Begründen Sie weiter, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten für zulässige Folgen als

$$p(a_n | a_1, \ldots, a_{n-1}) = \binom{a_{n-1}}{a_n/2} 2^{-a_{n-1}}$$

gegeben sind.
(b) Berechnen Sie $P(Z_3 > 0)$.

Aufgabe H4.4 Wir betrachten das Petrischalen-Experiment aus H4.3 mit dem Unterschied, dass sich jedes Bakterium mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ in zwei Teile teilt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ stirbt.

(a) Zeigen Sie, dass

$$P(Z_n = 2k) = \sum_{l=\lceil k/2 \rceil}^{2^{n-2}} \binom{2l}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{2l-k} P(Z_{n-1} = 2l)$$

(b) Sei erneut $Z_0 = 1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha = -\log(2\alpha)$. Zeigen Sie, dass

$$P(Z_n > 0) \leq \mathrm{e}^{-c_\alpha n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für $\alpha < \frac{1}{2}$. *(Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Z_n] = 2\alpha\mathbb{E}[Z_{n-1}]$.)*