LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Übungsblatt 3

Hausaufgaben

Aufgabe H3.1 In einer Gruppe von n Studenten ($n \in \mathbb{N}$) wirft jeder einen fairen Würfel.

(a) Für je zwei Studenten, die denselben Wert erwürfelt haben, erhält die Gruppe einen Punkt. Was ist die erwartete Anzahl an Punkten?

(b) Für je zwei Studenten, die denselben Wert erwürfelt haben, erhält die Gruppe diesen Wert als Punkt. Was ist die erwartete Anzahl an Punkten?

(c) Die Studenten werfen jetzt je einen fairen n-seitigen Würfel (mit Werten $1, \ldots, n$). Je zwei Studenten, die denselben Wert erwürfelt haben, erhalten den reziproken Wert (bei Wert k also $1/k$) als Punkt. Bezeichne X_n die Anzahl an Punkten bei n Würfen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathbb{E}[X_n]}{\log n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H3.2 Es sei (Ω, P) ein endlicher W-Raum, $N \in \mathbb{N}$ und $X : \Omega \to \{0, \ldots, N\}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{m=1}^{N} (2m-1) P(X \geq m).$$

Aufgabe H3.3 Es sei (Ω, P) ein endlicher W-Raum, $t > 0$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

$$P(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Aufgabe H3.4 In einer Herde von $N \in \mathbb{N}$ Tieren werden a eingefangen, markiert und wieder freigelassen. Seien nun $m \leq N$ gegeben. Es werden nun erneut Tiere eingefangen, und zwar so lange, bis unter den eingefangenen m markiert sind. Sei X die Zahl der Tiere, die erneut eingefangen wurden. Zeigen Sie, dass $m \leq X \leq N - a + m$ und dass

$$P(X = n) = \frac{a}{N} \frac{\binom{a-1}{m-1}\binom{N-a}{n-m}}{\binom{N-1}{n-1}}.$$

Folgern Sie, dass

$$\frac{a}{N} \binom{a-1}{m-1} \frac{(N-a)!}{(N-1)!} \sum_{n=m}^{N-a+m} \frac{(n-1)!(N-n)!}{(n-m)!(N-a+m-n)!} = 1$$

und zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{a+1} m$.