LMU München | Prof. Dr. Markus Heydenreich
Mathematisches Institut | Kilian Matzke
SoSe 2019

Stochastik (LAG): Probeklausur (Lösungsvorschläge)

Aufgabe K.1 Ein roter, ein gelber und ein blauer Würfel (alle sechsseitig) werden unabhängig voneinander geworfen. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl auf dem roten Würfel kleiner als die auf dem gelben Würfel und diese wiederum kleiner als die Zahl des blauen Würfels ist. In anderen Worten, falls R, G, B, die geworfene Augenzahl des roten, gelben und blauen Würfels bezeichnen, suchen wir nach $P(R < G < B)$.

(a) Formulieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für die Situation.

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine zwei Würfel denselben Wert anzeigen?

(c) Bedingt darauf, dass keine zwei Würfel denselben Wert anzeigen, was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{R < G < B\}$?

(d) Berechnen Sie $P(R < G < B)$.

Lösung.

(a) Ein möglicher Raum ist $[6]^3$ mit der Gleichverteilung. Für $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ bezeichnet dann der erste (zweite / dritte) Eintrag den Wert des roten (gelben / blauen) Würfels.

(b) Sei A die gesuchte Wahrscheinlichkit. Es gibt 6 mögliche Werte für rot, 5 für gelb und 4 für blau, also

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

(c) Unter den $3! = 6$ möglichen Anordnungen dreier verschiedener Zahlen ist genau eine die richtige, also ist $P(R < G < B \mid A) = \frac{1}{6}$.

(d) Es gilt $P(R < G < B) = (R < G < B \mid A)P(A) = \frac{5}{54}$. Alternativ lässt sich der Wert auch direkt berechnen als

$$P(R < G < B) = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}.$$

Aufgabe K.2 Zwei stetige Zufallsvariablen X, Y haben die gemeinsame Dichte

$$h(x,y) = \begin{cases} c & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c. Skizzieren Sie den Bereich in $\mathbb{R}^2$, auf dem $h > 0$.

(b) Sind X und Y unabhängig?

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Lösung.

(a) Es muss gelten

$$1 = c\int_0^1\int_0^1 \mathbb{1}_{\{x<y\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^1\int_0^y 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2},$$

also $c = 2$. Die Menge $\{h > 0\}$ ist das Dreieck mit Ecken $(0,0),(1,1),(0,1)$.

(b) Die Dichten von X und Y sind gegeben als

$$f_Y(y) = \int_0^1 h(x,y)\,\mathrm{d}x = 2y\mathbb{1}_{\{0<y<1\}}, \quad f_X(x) = \int_0^1 h(x,y)\,\mathrm{d}y = 2(1-x)\mathbb{1}_{\{0<x<1\}}.$$

Es gilt also $P(X > \frac{1}{2}) > 0$ und $P(Y < \frac{1}{2}) > 0$, aber $P(Y < \frac{1}{2} < X) = 0$, also sind X, Y abhängig.

(c) Es ist

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (-x^2 + x)\,\mathrm{d}x = (-\tfrac{2x^3}{3} + x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe K.3

(a) Formulieren Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen.

(b) Sei f stetig auf $[0,1]$. Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass für große n der durchschnittliche Funktionswert $I_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit als Näherung für das Integral $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ verwendet werden kann (zeigen Sie also $I_n \xrightarrow{P} I$ für $n \to \infty$).

Lösung.

(a) Eine mögliche Formulierung ist die folgende: *Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}[X_n]$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$

Man hätte „unabhängig“ durch „unkorreliert“ ersetzen können, ebenso hätte man die Definition stochastischer Konvergenz ausschreiben können.

(b) Definieren wir $Y_i := f(X_i)$, so sind die $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige und identisch verteilte Folge an Zufallsvariablen, die aufgrund der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f auf $[0,1]$ auch beschränkt ist – es existiert also insbesondere $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_1)$. Nach dem schwachen GgZ gilt also

$$I_n = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbb{E}[f(X_1)] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I,$$

Aufgabe K.4 Die Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_n$ seien stochastisch unabhängig mit gleicher Poisson-Verteilung $\mathrm{Poi}(\vartheta)$ wobei $\vartheta \in \Theta := (0,\infty)$ unbekannt sei.

(a) Stellen Sie die Likelihood-Funktion L_x zu einer Realisierung $x = (x_1,\dots,x_n)$ von $(X_1,\dots,X_n)$ auf und bestimmen Sie den ML-Schätzwert $\widehat{\vartheta}_n(x)$.

(b) Ist der ML-Schätzer $\widehat{\vartheta}_n = \widehat{\vartheta}_n((X_1,\dots,X_n)$ erwartungstreu für ϑ?

(c) Gilt $\widehat{\vartheta}_n \xrightarrow{P} \vartheta$ für $n \to \infty$?

Lösung. Siehe Henze, Aufgabe 29.1

Aufgabe K.5

(a) Was bedeutet es, wenn ein statistischer Test mit Nullhypothese H_0, Alternative H_1 und kritischem Bereich $\mathcal{K}$ das Signifikanzniveau α besitzt?

(b) Es soll die Sprödigkeit eines Kühlwasserrohres in einem Kernkraftwerk überprüft werden. Dazu werden n unabhängige Messungen mit (zufälligen) Ergebnissen $x_1, \ldots, x_n$ durchgeführt. Wir nehmen an, die Messwerte sind normalverteilt mit bekannter Varianz $v > 0$ (sie entspricht der Güte des Messinstruments) und unbekanntem Erwartungswert m, der die gesuchte Sprödigkeit angibt. Es soll getestet werden, ob m unterhalb eines zulässigen Grenzwerts m_0 liegt.

Modellieren Sie die Situation als statistisches Modell für die Hypothese $H_0 : m \leq m_0$ gegen die Alternative $H_1 : m > m_0$ mit kritischem Bereich $\mathcal{K} = \{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i > c\}$ an. Für welche Werte von c ist der Test ein Signifikanztest zum Niveau $\alpha \in (0,1)$?

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass die Summe zweier unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist.

Lösung.

(a) Es sei X die Zufallsvariable der Realisierung, z.B. $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Der Test ist ein Niveau-α-Test falls $P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) \leq \alpha$ für alle $\vartheta \in \Theta_0$.

(b) Seien $X_1, \ldots X_n$ die Messwerte und definiere $T := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ als ihr Mittel. Aus der Annahme folgt induktiv leicht, dass T normalverteilt ist. Da $\mathbb{E}[T] = m$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T) = v/n$, ist also $T \sim \mathcal{N}(m, v/n)$. Weiter zeigt man leicht, dass $P_m(T > c) \leq P_{m_0}(T > c)$ für alle $m \leq m_0$. Also gilt

$$\alpha \overset{!}{\geq} P_{m_0}(T > c) = \mathcal{N}_{m_0,\frac{v}{n}}((c,\infty)) = 1 - \Phi\left(\frac{c - m_0}{\sqrt{n/v}}\right)$$

und folglich

$$c \geq m_0 + \sqrt{v/n} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Beweis des Hinweises. Der Vollständigkeit halber beweisen wir noch den Hinweis. Nehme an, dass $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ und $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängig sind. Es bezeichne φ die Dichte der Standardnormalverteilung und φ_σ die Dichte von Z. Dann gilt mit der Faltungsformel (siehe Henze, 17.8; diese lässt sich analog für stetige Zufallsvariablen zeigen)

$$f_{Y+Z}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi_\sigma(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\sigma}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x-t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Da $t^2 + \frac{1}{\sigma^2}(x-t)^2 = (\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2}}t - \frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma^2+1}}x)^2 + \frac{x^2}{\sigma^2+1}$, gilt weiterhin

$$\begin{aligned} f_{Y+Z}(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)}}}{2\pi\sigma}\int \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2}}t - \tfrac{1}{\sigma\sqrt{\sigma^2+1}}x\Big)^2\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)}}}{2\pi\sigma}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(1+\sigma^{-2})t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1+\sigma^{-2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+1}}, \end{aligned}$$

wobei wir $s = t\sqrt{1+\sigma^{-2}}$ substituiert haben. Also hat $Y+Z$ eine $\mathcal{N}(0, 1+\sigma)$-Verteilung. Gilt nun allgemeiner, dass $Y \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Z \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, so ist

$$P(Y + Z \leq c) = P\Big(\frac{Y - \mu_1}{\sigma_2} + \frac{Z - \mu_2}{\sigma_2} \leq \frac{c - \mu_1 - \mu_2}{\sigma_2}\Big),$$

wir können also den allgemeinen Fall auf den bewiesenen Fall zurückführen.