LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke


# Stochastik (LAG): Probeklausur

**Aufgabe K.1** Ein roter, ein gelber und ein blauer Würfel (alle sechsseitig) werden unabhängig voneinander geworfen. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl auf dem roten Würfel kleiner als die auf dem gelben Würfel und diese wiederum kleiner als die Zahl des blauen Würfels ist. In anderen Worten, falls $R, G, B$, die geworfene Augenzahl des roten, gelben und blauen Würfels bezeichnen, suchen wir nach $P(R < G < B)$.

(a) Formulieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für die Situation.

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine zwei Würfel denselben Wert anzeigen?

(c) Bedingt darauf, dass keine zwei Würfel denselben Wert anzeigen, was ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{R < G < B\}$?

(d) Berechnen Sie $P(R < G < B)$.

**Aufgabe K.2** Zwei stetige Zufallsvariablen $X, Y$ haben die gemeinsame Dichte

$$h(x, y) = \begin{cases} c & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $c$. Skizzieren Sie den Bereich in $\mathbb{R}^2$, auf dem $h > 0$.

(b) Sind $X$ und $Y$ unabhängig?

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

**Aufgabe K.3**

(a) Formulieren Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen.

(b) Sei $f$ stetig auf $[0, 1]$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass für große $n$ der durchschnittliche Funktionswert $I_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit als Näherung für das Integral $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ verwendet werden kann (zeigen Sie also $I_n \xrightarrow{P} I$ für $n \to \infty$).

**Aufgabe K.4** Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängig mit gleicher Poisson-Verteilung $\mathrm{Poi}(\vartheta)$ wobei $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$ unbekannt sei.

(a) Stellen Sie die Likelihood-Funktion $L_x$ zu einer Realisierung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ von $(X_1, \ldots, X_n)$ auf und bestimmen Sie den ML-Schätzwert $\widehat{\vartheta}_n(x)$.

(b) Ist der ML-Schätzer $\widehat{\vartheta}_n = \widehat{\vartheta}_n((X_1, \ldots, X_n)$ erwartungstreu für $\vartheta$?

(c) Gilt $\widehat{\vartheta}_n \xrightarrow{P} \vartheta$ für $n \to \infty$?

**Aufgabe K.5**

(a) Was bedeutet es, wenn ein statistischer Test mit Nullhypothese $H_0$, Alternative $H_1$ und kritischem Bereich $\mathcal{K}$ das Signifikanzniveau $\alpha$ besitzt?

(b) Es soll die Sprödigkeit eines Kühlwasserrohres in einem Kernkraftwerk überprüft werden. Dazu werden $n$ unabhängige Messungen mit (zufälligen) Ergebnissen $x_1, \ldots, x_n$ durchgeführt. Wir nehmen an, die Messwerte sind normalverteilt mit bekannter Varianz $v > 0$ (sie entspricht der Güte des Messinstruments) und unbekanntem Erwartungswert $m$, der die gesuchte Sprödigkeit angibt. Es soll getestet werden, ob $m$ unterhalb eines zulässigen Grenzwerts $m_0$ liegt.

Modellieren Sie die Situation als statistisches Modell für die Hypothese $H_0 : m \leq m_0$ gegen die Alternative $H_1 : m > m_0$ mit kritischem Bereich $\mathcal{K} = \{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i > c\}$ an. Für welche Werte von $c$ ist der Test ein Signifikanztest zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$?

*Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass die Summe zweier unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist.*