LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Nachklausuraufgaben

(Lösungen)

Aufgabe K.1 Zur Vorbereitung auf die Stochastik-Klausur teilen sich die Studentinnen Anna, Bea und Carola zusammen mit ihren Kommilitonen David, Emil und Felix zufällig in drei disjunkte Lerngruppen aus jeweils zwei Personen auf. Hierbei sind alle Aufteilungen gleich wahrscheinlich.

(a) Stellen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für obige Situation auf.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der alle Lerngruppen gemischt sind. Eine Lerngruppe heißt gemischt, wenn sie sowohl männliche als auch weibliche Studierende enthält.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Lerngruppen gemischt, falls Anna und David eine gemeinsame Lerngruppe bilden?

(d) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Vereinigung der beiden Ereignisse „Anna und David bilden eine Lerngruppe“ und „Bea und Carola bilden eine Lerngruppe“ ist unabhängig vom Ereignis, dass alle Lerngruppen gemischt sind.

Lösung.

(a) Wir wählen

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_6) : \omega_1 = A, \omega_i \in \{A, B, C, D, E, F\}, \omega_i \neq \omega_j \forall i \neq j\}.$$

Hierbei bezeichnen (ω_i, ω_{i+1}) für $i \in \{1, 3, 5\}$ die drei Lerngruppen. Als P wählen wir die Gleichverteilung

(b) Es ist $|\Omega| = 5! = 120$. Sei M das Ereignis gemischter Lerngruppen. Dann gilt

$$P(M) = \frac{3 \times 2\binom{2}{1}\binom{2}{1} \times 2}{120} = \frac{2}{5}.$$

(3 Möglichkeiten, einen männlichen Lernpartner für A zu wählen; für ω_3 und ω_4 jeweils $\binom{2}{1}$ Möglichkeiten, eine männliche / weibliche Option zu wählen; diese Wahlen müssen für die Reihenfolge noch mit 2 multipliziert werden.)

(c) Wir können o.B.d.A. $\omega_3 = B$ setzen (Die Situation ist wie die in (a), nur mit 4 statt 6 Personen). Damit gilt

$$P(M \mid \omega_2 = D) = \frac{2 \times 2}{3!} = \frac{2}{3}.$$

(d) Wir nennen $L = \{\omega_2 = D\}$ das Ereignis, dass Anna und David eine Lerngruppe bilden sowie N das Ereignis, dass Bea und Carola eine Lerngruppe bilden. Aus Symmetriegründen gilt $P(L) = P(N) = \frac{1}{5}$. Weiter gilt

$$P(L \cap N) = \frac{1}{5} P(N \mid L) = \frac{1}{5}\frac{2}{3!} = \frac{1}{5}\frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

Nach Inklusion-Exklusion ist $P(L \cup N) = \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} P((L \cup N) \cap M) = P(L \cap M) = P(M \mid L)P(L) &= \frac{2}{3}\frac{1}{5} = \frac{2}{15} \\ &= \frac{2}{5}\frac{1}{3} = P(M)P(L \cup N), \end{aligned}$$

weswegen die beiden Ereignisse unabhängig sind.

Aufgabe K.2 Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und der Eigenschaft, dass

$$P(X \geq s + t \mid X \geq t) = P(X \geq s)$$

für $s, t \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass X die Verteilung $P(X = k) = (1 - p)^k p$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $p := P(X = 0)$ besitzt.

Lösung. Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(X \geq k) = \prod_{i=1}^{k} P(X \geq i \mid X \geq i - 1) = P(X \geq 1)^k = (1 - p)^k,$$

und somit

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geq k) - P(X \geq k + 1) = (1 - p)^k - (1 - p)^{k+1} \\ &= (1 - p)^k [1 - (1 - p)] = (1 - p)^k p. \end{aligned}$$

Aufgabe K.3 Ein Flugzeug bietet insgesamt 93 Fluggästen Platz. Da Kunden manchmal ihren Flug nicht antreten, lassen Fluggesellschaften zwecks optimaler Auslastung Überbuchungen zu. Es sollen möglichst viele Tickets verkauft werden; gleichzeitig soll sich die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung im Rahmen halten. Wir nehmen an, dass ein Kunde mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = \frac{1}{10}$ nicht zum Flug erscheint und wir nehmen vereinfachend weiter an, dass das Nichterscheinen für verschiedene Kunden unabhängig voneinander ist. Nutzen Sie eine Normalapproximation, um bei 100 verkauften Tickets die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung zu berechnen.

Lösung. Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ mit $n = 100$ und $p = \frac{9}{10}$. Wir sind interessiert an $P(X > 93)$. Sei $X^* = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (wobei $\sqrt{np(1 - p)} = 3$). Dann gilt

$$P(X > 93) = P\Big(X^* > \frac{93 - 90}{3}\Big) = 1 - P(X^* \leq 1) \approx 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

Aufgabe K.4

(a) Geben Sie die Definition für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ wieder.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \vartheta^2)$. Ist

$$\widehat{\vartheta}_n := \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ? Gilt ferner $\widehat{\vartheta}_n \xrightarrow{P} \vartheta$ für $n \to \infty$?

Lösung.

(a) Es gilt $X_n \xrightarrow{P} a$ falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$P(|X_n - a| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{\vartheta}_n] &= \frac{\sqrt{\pi/2}}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbb{E}[|X_1|] = \frac{1}{2\vartheta} \int_{\mathbb{R}} |x| \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\vartheta^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\vartheta} \int_0^\infty x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\vartheta^2}} \, \mathrm{d}x = \vartheta \Big[- \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\vartheta^2}} \Big]_0^\infty = \vartheta.
\end{aligned}$$

Definieren wir $Y_n := \sqrt{\frac{\pi}{2}}|X_n|$, so ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen, mit $\mathbb{E}[Y_1] = \vartheta$ und $\widehat{\vartheta}_n = \frac{1}{n}S_n$ mit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Nach dem schwachen GgZ gilt also $\widehat{\vartheta}_n = \frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}[Y_1] = \vartheta$.

Aufgabe K.5

(a) Wie ist der p-Wert eines statistischen Tests definiert?

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt, wobei $X_1 \sim \mathcal{U}_{[\vartheta, 2\vartheta]}$ mit $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$ (X_1 ist also gleichverteilt auf $[\vartheta, 2\vartheta]$). Bestimmen Sie die Gütefunktion des Tests mit kritischem Bereich

$$\mathcal{K} = \big\{ \min\{X_i : i \in [n]\} \in \big((0,1) \cup (\tfrac{3}{2}, \infty)\big) \big\}$$

für das Testproblem $H_0 : \theta = 1$ gegen $H_1 : \theta \neq 1$.

Lösung.

(a) Der p-Wert $p^*(x)$ zur Beobachtung x ist das Infimum über alle Zahlen α, für die die Wahl von α als Testniveau zur Ablehnung von H_0 führt.

(b) sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ und $X_{\min} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Wir betrachten die folgenden Fälle:

<u>$\vartheta < \frac{1}{2}$:</u> Hier gilt $P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = 1$.

<u>$\vartheta \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$:</u> Es gilt

$$P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = P_\vartheta(X_{\min} < 1) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_\vartheta(X_i \geq 1) = 1 - (2 - \tfrac{1}{\vartheta})^n.$$

$\underline{\vartheta \in [\frac{3}{4}, 1)}$: Es gilt

$$P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = P_\vartheta(X_{\min} < 1) + P_\vartheta(X_{\min} > \tfrac{3}{2}) = 1 - (2 - \tfrac{1}{\vartheta})^n + (2 - \tfrac{3}{2\vartheta})^n.$$

$\underline{\vartheta \in [1, \frac{3}{2}]}$: Hier gilt

$$P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = P_\vartheta(X_{\min} > \tfrac{3}{2}) = \prod_{i=1}^{n} P_\vartheta(X_i > \tfrac{3}{2}) = (2 - \tfrac{3}{2\vartheta})^n.$$

$\underline{\vartheta > \frac{3}{2}}$: Hier gilt $P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = 1$.