LMU München
Mathematisches Institut
SoSe 2019

Prof. Dr. Markus Heydenreich
Kilian Matzke

Stochastik (LAG): Klausuraufgaben (Lösungen)

Aufgabe K.1 In einer Schublade befinden sich n Socken ($n > 3$). Drei davon sind rot, die restlichen sind schwarz. Anna wählt zufällig gleichverteilt zwei der Socken aus und zieht sie an.

(a) Stellen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für die Farbverteilung der Socken auf, die Anna trägt.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, zwei Socken verschiedener Farbe zu tragen, sei dreimal so hoch wie die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Socken zu tragen. Berechnen Sie n.

(c) Was ist für n aus Teilaufgabe (b) die Wahrscheinlichkeit, dass Anna zwei schwarze Socken trägt?

Lösung.

(a) Ein möglicher Raum ist $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{r, s\}\}$. Auch $\Omega = \{0, 1, 2\}$ für die Anzahl roter Socken wäre ausreichend. Im zweiten Fall gilt für $i \in \{0, 1, 2\}$

$$P_n(\{i\}) = \frac{\binom{3}{i}\binom{n-3}{2-i}}{\binom{n}{2}}.$$

(b) Nach Voraussetzung gilt

$$3\frac{3}{\binom{n}{2}} = 3P_n(\{2\}) = P_n(\{1\}) = \frac{3(n-3)}{\binom{n}{2}},$$

also $3 = n - 3$, was sich zu $n = 6$ löst.

(c) Es gilt

$$P_6(\{0\}) = \frac{3}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Aufgabe K.2 Es seien X, Y zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$h(x,y) = \begin{cases} cxy\mathbb{1}_{\{0\leq x+y\leq 1\}} & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie c.

(b) Sind X und Y unabhängig?

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$.

Lösung.

(a) Es muss gelten

$$1 \overset{!}{=} \int_0^1 \int_0^1 h(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = c\int_0^1 x \int_0^{1-x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^1 x\big[y^2\big]_0^{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{c}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\big[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4\big]_0^1 = \frac{c}{24},$$

also $c = 24$.

(b) Aufgrund der Symmetrie von h besitzen X und Y dieselbe Randdichte. Diese ist gegeben als

$$f_Y(x) = f_X(x) = \int_0^1 h(x,y)\,\mathrm{d}y = 12(x - 2x^2 + x^3).$$

Insbesondere ist $0 < P(X > \frac{1}{2}) = P(Y > \frac{1}{2})$, aber $P(\min\{X,Y\} > \frac{1}{2}) = 0$, weswegen X und Y abhängig sind.

(c) Es ist $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$ und

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,\mathrm{d}x = 12\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = 12\big[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5\big]_0^1 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

Aufgabe K.3

(a) Formulieren Sie die Tschebyschow-Ungleichung für eine Zufallsvariable X.

(b) Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, sodass $\mathbb{E}[Z_n] = \mu$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z_n) = \sigma^2 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte weiterhin für beliebige $i, j \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(Z_i, Z_j) \leq \mathrm{e}^{-|i-j|}.$$

Zeigen Sie, dass für $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ dann $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} \mu$ für $n \to \infty$ folgt.

Lösung.

(a) Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[X]$ und Varianz $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) < \infty$. Dann gilt für $t > 0$

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{t^2}.$$

(b) Wir beobachten zuerst, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}, i\neq j} \mathbb{C}\mathrm{ov}(Z_i, Z_j) \leq 2\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n} = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} < \infty. \tag{1}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\mathbb{E}[S_n] = n\mu$, gilt mit der Tschebyschow-Ungleichung

$$P(|\tfrac{1}{n}S_n - \mu| \geq \varepsilon) = P(|S_n - n\mu| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}{n^2\varepsilon^2}.$$

Wir zeigen, dass $n^{-2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dafür beobachten wir, dass (mit Satz 21.2(f) aus dem Henze-Buch über die Varianz der Summe von ZV)

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(Z_i) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{C}\mathrm{ov}(Z_i, Z_j)\\ &\le n\sigma^2 + 2n \max_{1\le i\le n} \sum_{j\in\mathbb{N}, i\neq j} \mathbb{C}\mathrm{ov}(Z_i, Z_j)\\ &\le n\Big(\sigma^2 + 2\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}}\Big) =: cn,\end{aligned}$$

wobei (1) verwendet wurde. Damit gilt $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)/n^2 \le cn/n^2 \to 0$, was zu zeigen war.

Aufgabe K.4 Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Stichproben mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\vartheta}\mathrm{e}^{-x/\vartheta}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$ für $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$.

(a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ zu einer Realisierung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ von $(X_n, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\vartheta}_n$ gegeben ist durch $\widehat{\vartheta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

(b) Ist $\widehat{\vartheta}_n$ erwartungstreu? Gilt $\widehat{\vartheta}_n \xrightarrow{P} \vartheta$ für $n \to \infty$?

Lösung.

(a) Da die X_i unabhängig sind, faktorisiert die gemeinsame Dichte, weswegen

$$L_x(\vartheta) = f_\vartheta(x) = \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-x_i/\vartheta} = \vartheta^{-n}\mathrm{e}^{-n\bar{x}/\vartheta},$$

wobei $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Für den Maximum-Likelihood-Schätzer betrachten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} L_x(\vartheta) &= (-n)\vartheta^{-n-1}\mathrm{e}^{-n\bar{x}/\vartheta} + \vartheta^{-n} n\bar{x}\vartheta^{-2}\mathrm{e}^{-n\bar{x}/\vartheta}\\ &= \vartheta^{-n-1}\mathrm{e}^{-n\bar{x}/\vartheta}\Big(n\bar{x}\vartheta^{-1} - n\Big)\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}L_x(\vartheta)$ nur eine Nulsltelle bei $\vartheta_0 = \bar{x}$ besitzt. Da $L_x(\vartheta) > 0$ und $\lim_{\vartheta\to a} L_x(\vartheta) = 0$ für $a \in \{0, \infty\}$, folgt mit der Stetigkeit von L_x, dass ϑ_0 ein Maximum sein muss. Also ist $\widehat{\vartheta}_n$ ein ML-Schätzer.

(b) Es gilt $\mathbb{E}[\widehat{\vartheta}_n] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i] = \mathbb{E}[X_1]$. Da X_1 exponentialverteilt ist zum Parameter ϑ^{-1} (siehe Übung 11.3), ist $\mathbb{E}[X_1] = \vartheta$ und $\widehat{\vartheta}_n$ ist erwartungstreu. Die Aussage $\widehat{\vartheta}_n \xrightarrow{P} \vartheta$ folgt direkt mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe K.5

(a) Wie sind Fehler erster und zweiter Art eines statistischen Tests definiert?

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt, wobei $X_1 \sim \mathcal{U}_{[0,\vartheta]}$ (X_1 ist also gleichverteilt auf $[0, \vartheta]$). Bestimmen Sie die Gütefunktion des Tests mit kritischem Bereich

$$\mathcal{K} = \big\{ \max\{X_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \in \big([0, \tfrac{1}{2}] \cup (1, \infty)\big)\big\}$$

für das Testproblem $H_0 : \theta = 1$ gegen $H_1 : \theta \neq 1$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art.

Lösung.

(a) Der Fehler erster Art ist eine Ablehnung von H_0, falls tatsächlich H_0 gilt. Der Fehler zweiter Art ist ein Akzeptieren von H_0, falls tatsächlich H_1 wahr ist.

(b) Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ und $X_{\max} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Wir berechnen $P_\vartheta(X \in \mathcal{K})$ und betrachten verschiedene Fälle:

$\underline{\vartheta \leq \frac{1}{2}}$: Hier gilt $P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = 1$.
$\underline{\vartheta \in (\frac{1}{2}, 1]}$: Hier gilt

$$P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) = P_\vartheta(X_{\max} \leq \tfrac{1}{2}) = \prod_{i=1}^{n} P_\vartheta(X_i \leq \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{(2\vartheta)^n}.$$

$\underline{\vartheta > 1}$: Hier gilt

$$\begin{aligned} P_\vartheta(X \in \mathcal{K}) &= P_\vartheta(X_{\max} \leq \tfrac{1}{2}) + P_\vartheta(X_{\max} > 1) = \frac{1}{(2\vartheta)^n} + 1 - P_\vartheta(X_{\max} \leq 1) \\ &= \frac{1}{(2\vartheta)^n} + 1 - \frac{1}{\vartheta^n} = 1 - \frac{1 - 2^{-n}}{\vartheta^n}. \end{aligned}$$

Der Fehler erster Art ist $P_1(X \in \mathcal{K}) = 2^{-n}$.